Лекция 8

3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Матричные нормы

Рассмотрим векторное пространство R^n. Пусть

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор данного пространства.

Нормой вектора называется функция $\|\vec{x}\|$ от вектора $\vec{x}$, для которой выполняются следующие аксиомы:

(Н1): $\|\bar{x}\| \ge 0$, $\quad \|\bar{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{0}$,

(Н2): $\|\alpha \cdot \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$, $\quad \alpha \in R$, $\vec{x} \in R^n$,

(Н3): $\|\bar{x} + \bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$, $\quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in R^n$.

Пример:

$\|\bar{x}\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n}\{|x_j|\} = \max\{|x_1|,...,|x_n|\}$ - кубическая норма;

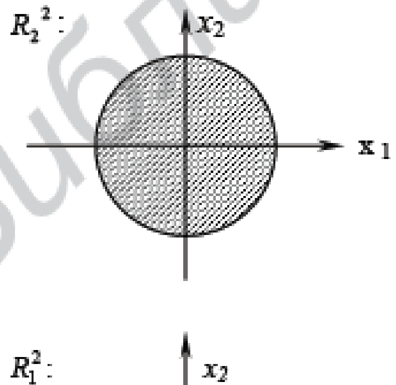
$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ – евклидова норма;

$\|\bar{x}\|_3 = \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j| = |x_1| + ... + |x_n|$ - октаэдрическая норма.

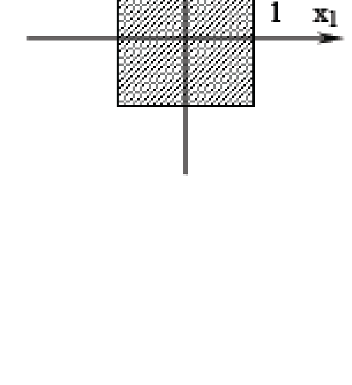
Существуют и другие менее употребляемые векторные нормы.

Векторное пространство вместе с заданной в нем нормой называется *нормированным векторным пространством*.

Пример: Рассмотрим нормированные векторные пространства с различными нормами в двумерном пространстве R^2 и соответствующие им единичные окрестности начала координат:

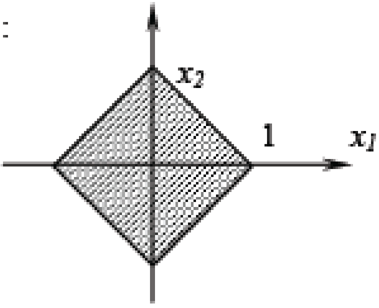


с нормой $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,



с нормой $\|\bar{x}\|_1 = \max\{|x_1|,|x_2|\}$,

R_3^2:



с нормой $\|\bar{x}\|_3 = \sum_{j=1}^{2} |x_j| = |x_1| + |x_2|$.

Рассмотрим квадратную матрицу $A_{n\times n}$.

Нормой матрицы А, индуцированной нормой вектора $\bar{x}$, называется число

$$\|A\| \overset{def}{=} \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}.$$

Из этого определения непосредственно следует, что для любой индуцированной нормы справедливы следующие свойства:

1) $\|E\| = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|E\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = 1$, где E – единичная матрица;

2) $\|O\| = 0$, где O – нулевая матрица;

3) $\|A\| \geq \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$, $\forall \bar{x} \neq \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\|$;

4) $\|AB\| = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|AB\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|A\| \cdot \|B\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \|A\| \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|B\bar{x}\|}{\bar{x}} = \|A\| \cdot \|B\|$,

т.е.

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Легко видеть, что для индуцированной нормы матрицы выполняются соотношения:

(Н1′): $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0$ $\Leftrightarrow$ $A = O$;

(Н2′): $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;

(Н3′): $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

(Н4′): $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Нормой матрицы называется функция $\|A\|$ от матрицы A , для которой выполняются аксиомы (Н1′) - (Н4′).

Таким образом, индуцированные матричные нормы представляют собой частный случай матричных норм. Из аксиомы (Н4′) очевидно следует, что

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \qquad k = 1,2,\ldots$$

Найдем матричную норму $\|A\|_1$, индуцированную векторной нормой $\|\vec{x}\|_1$:

$$\|A\|_1 = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|A\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1} = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{1}{\|\bar{x}\|_1} \max_{1\le i\le n} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\} \le \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{1}{\|\bar{x}\|_1} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\cdot|x_j| \le$$

$$\le \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{1}{\|\bar{x}\|_1} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_j |x_j| = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{1}{\|x\|_1} \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\cdot\|\bar{x}\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Таким образом $\|A\|_1 \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Докажем, что $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Для этого необходимо показать, что $\|A\|_1 \ge \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

По определению

$$\|A\|_1 = \sup_{\bar{x}\neq\bar{0}} \frac{\|A\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1} \ge \frac{\|A\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1} \qquad \text{для любого } \bar{x}.$$

Предположим, что в $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ максимум достигается при $i=i_0$, то есть $\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$.

Возьмем ненулевой вектор $\bar{x}^0$ такой, что $x_j^0 = \operatorname{sgn} a_{i_0 j}$. Тогда $\|\bar{x}^0\|_1 = 1$. Следовательно:

$$\|A\|_1 \ge \frac{\|A\bar{x}^0\|}{\|\bar{x}^0\|_1} \ge \|A\bar{x}^0\|_1 = \max_i \{|\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^0|, \ldots, |\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j^0|\} \ge |\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j^0| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_i |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|.$$

То есть, действительно, $\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Совершенно аналогично можно показать, что:

$$\|A\|_3 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Сложнее дело обстоит с матричной нормой индуцированной евклидовой векторной нормой.

Спектральным радиусом матрицы A называется число

$\mu(A) = \max\{ |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n| \}$,

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные значения данной матрицы.

Лемма 1. Для любой матричной нормы $\mu(A) \le \|A\|$.

Доказательство. Действительно, пусть λ - собственное значение матрицы A и $\mu(A) = |\lambda|$. Построим матрицу B того же порядка, что и A, у которой первый столбец совпадает с собственным вектором $\bar{x}$ матрицы A, соответствующим собственному значению λ, а остальные столбцы -

нулевые. Тогда очевидно $AB = \lambda B$. Используя аксиомы из определения матричной нормы, получим

$$|\lambda| \, \|B\| \le \|A\| \, \|B\|,$$

и поскольку $B \ne O$, и , следовательно, $\|B\| \ne 0$, получаем $|\lambda\| \le \|A\|$.

По аналогии с векторами в R^n можно определить сходимость последовательности матриц поэлементно, считая что $A^{(k)} \to A$ при $k \to \infty$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ для всех $i,j=1, \ldots, n$. Отметим, что, как и в случае с векторами, для любой матричной нормы из условия сходимости по норме $\| A^{(k)} - A \| \to 0$ всегда следует сходимость $A^{(k)} \to A$ при $k \to \infty$.

На практике часто приходится иметь дело с матричной геометрической прогрессией

$$E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots$$

и встает вопрос о ее сходимости.

Лемма 2. Для того чтобы $A^k \to O$ при $k \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы A были по модулю меньше единицы.

Доказательство. Докажем лемму для случая симметричной матрицы A. Из линейной алгебры известно, что в этом случае

$$A = T^{-1} \Lambda T,$$

где Λ диагональная матрица с действительными собственными значениями

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

на главной диагонали. Соответственно,

$$A^k = T^{-1} \Lambda^k T,$$

где на главной диагонали диагональной матрицы Λ^k стоят элементы

$$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k.$$

Таким образом, каждый элемент матрицы A^k является линейной комбинацией $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ с коэффициентами не зависящими от k. Следовательно, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ по модулю меньше единицы, то все элементы матрицы A^k стремятся к нулю при $k \to \infty$, т.е. $A^k \to O$.

Обратно,

$$\Lambda^k = T A^k T^{-1},$$

и, следовательно, все $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ стремятся к нулю при $A^k \to O$. Последнее означает, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ по модулю меньше единицы.

Лемма 3. Для того чтобы ряд $E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots$ сходился необходимо и достаточно, все собственные значения матрицы A были по абсолютной величине меньше единицы. В этом случае матрица $E-A$ имеет обратную и

$$E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots = (E-A)^{-1}.$$

Доказательство. 1) Пусть матричный ряд сходится. Это равносильно сходимости n^2 числовых рядов. Тогда в силу необходимого признака сходимости числового ряда каждый элемент матрицы A^k стремится к нулю при $k \to \infty$, следовательно, $A^k \to O$ при $k \to \infty$. В силу леммы 2 последнее равносильно тому, что все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

2) Пусть все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы. Отметим сразу, что матрица $(E - A)$ невырождена, поскольку ее определитель $|E - A| = |A - E|$ не может обращаться в 0 (иначе среди собственных значений матрицы A было бы и число 1). Рассмотрим тождество

$$(E + A + A^2 + \ldots + A^k)\,(E - A) = E - A^{k+1},$$

откуда следует

$$(E + A + A^2 + \ldots + A^k) = (E - A)^{-1} - A^{k+1}(E - A)^{-1}.$$

Согласно лемме 2 $A^k \to O$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$(E + A + A^2 + \ldots + A^k) \to (E - A)^{-1} \text{ при } k \to \infty,$$

т.е. ряд сходится.

Покажем теперь, что норма $\|A\|$, индуцированная евклидовой нормой вектора, совпадает с $\sqrt{\lambda}$, где λ - наибольшее собственное значение матрицы A^*A, (A^* - матрица, полученная из A транспонированием).

Прежде всего убедимся, что $\lambda \geq 0$. Действительно, поскольку

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A,$$

то матрица A^*A симметрическая. Кроме того,

$$(A\bar{x}, A\bar{x}) = (\bar{x}, A^*Ax) \geq 0$$

для любого вектора $\vec{x}$. То есть A^*A - симметрическая неотрицательно определенная матрица. Как известно из курса линейной алгебры все собственные значения такой матрицы действительны и неотрицательны. Более того, существует ортонормированный базис из собственных векторов $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ данной матрицы, соответствующих ее собственным значениям $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Рассмотрим произвольный вектор $\bar{x}$ единичной евклидовой нормы и разложим его по базису $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$:

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}^1 + \ldots + \alpha_n \bar{x}^n.$$

Тогда

$$\|\bar{x}\|_2^2 = (\bar{x}, \bar{x}) = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$$

и, следовательно,

$$\|A\bar{x}\|_2^2 = (A\bar{x}, A\bar{x}) = (\bar{x}, A^*A\bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}^i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \bar{x}^i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_1.$$

Отсюда

$$\|A\| \leq \sqrt{\mu(A^*A)}.$$

С другой стороны, для нормы $\|A\|$, индуцированной евклидовой векторной нормой, справедливо

$$\|A\| \geq \|A\bar{x}^1\|_2 , \text{ где } \|A\bar{x}^1\|_2^2 = (A\bar{x}^1, A\bar{x}^1) = (\bar{x}^1, A^*A\ \bar{x}^1) = \lambda_1 (\bar{x}^1, \bar{x}^1) = \lambda_1,$$

откуда

$$\|A\| \geq \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\mu(\mathrm{A^*A})} .$$

В итоге, действительно матричная норма, индуцированная евклидовой векторной нормой, имеет вид

$$\|A\| = \sqrt{\mu(\mathrm{A^*A})} .$$

Такая норма матрицы A называется спектральной.

В частном случае, когда матрица A симметрическая, $A^*A = A^2$ и поскольку собственные значения этой матрицы совпадают с квадратами λ_1^2, λ_2^2 ,……., λ_n^2 собственных значений матрицы A, то спектральная норма матрицы совпадает с наибольшим по абсолютной величине собственным значением матрицы A, то есть равна спектральному радиусу матрицы A :

$$\|A\| = \mu(A).$$

Спектральная норма матрицы неудобна в практическом плане из-за трудности ее вычисления. Поэтому наряду с нормами $\|A\|_1$ и $\|A\|_3$, индуцированными кубической и октаэдрической векторными нормами , мы будем пользоваться евклидовой нормой матрицы

$$\|A\|_2 = \sqrt{Sp(A^* A)} ,$$

где SpA – след матрицы A, т.е. сумма ее элементов, стоящих на главной диагонали. Как легко проверить, эту норму можно записать также в виде

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} .$$

Нетрудно проверить, что для введенной нормы $\|A\|_2$ выполняются все аксиомы из определения матричной нормы. Кроме того, эта норма является *согласованной с* евклидовой *векторной нормой* в том смысле, что для нее и евклидовой векторной нормы всегда выполняется соотношение

$$\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \, \|\bar{x}\|.$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением матричных норм, согласованные с соответствующими векторными нормами.