Лекция 7

ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ФОРМУЛЫ ГРИНА

В дальнейшем в нашем курсе широко используются формулы, которые называются формулами Грина. Выведем первую и вторую формулы Грина для общего эллиптического оператора.

Пусть область D ограничена гладкой замкнутой поверхностью S. Напомним, что поверхность S называется гладкой, если в каждой точке ее существует касательная плоскость (или нормаль) и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости (нормали) меняется непрерывно. Пусть в области D задана векторная функция $\vec{A}(M)$, которая непрерывна в $\overline{D} = D \cup S$ - область с границей S и имеет непрерывные первые производные в D. Тогда для нее справедлива формула Гаусса—Остроградского (**Ильин В. А., Позняк Э. Г Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.)**

$$\int_D div\vec{A}dV = \oint_S \vec{n}\vec{A}dS \qquad (1)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, внешней по отношению к области D.

Формулу Гаусса—Остроградского используем для вывода формул Грина.

Пусть в области D заданы функции u и v, непрерывные вместе с первыми производными в $\overline{D}$ и имеющие непрерывные вторые производные в D ($u, v \in C^{(1)}\left(\overline{D}\right) \cap C^{(2)}\left(D\right)$). Введем дифференциальный оператор

$$Lu = \operatorname{div}\left(\kappa \operatorname{grad} u\right) - qu,$$

где функции κ и q непрерывны в $\overline{D}$, функция κ непрерывно дифференцируема в D.

Рассмотрим интеграл

$$\int_D vLu\,dV = \int_D v\,\mathrm{div}\left(\kappa\,\mathrm{grad}\,u\right)dV - \int_D qvu\,dV\,.$$

Учитывая, что

$$v\,\mathrm{div}\left(\kappa\,\mathrm{grad}\,u\right) = \mathrm{div}\left(\kappa v\,\mathrm{grad}\,u\right) - \kappa\,\mathrm{grad}\,u\,\mathrm{grad}\,v,$$

и используя формулу (1), получим

$$\int_D vLu\,dV = \oint_S \kappa v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int_D \left(\kappa\,\mathrm{grad}\,u\,\mathrm{grad}\,v + quv\right)dV \qquad (2)$$

эта формула называется **первой формулой Грина**.

Поменяем в формуле (2) функции u и v местами:

$$\int_D uLv\,dV = \oint_S \kappa u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \int_D \left(\kappa\,\mathrm{grad}\,u\,\mathrm{grad}\,v + quv\right)dV\,. \quad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получим **вторую формулу Грина**

$$\int_D \left(vLu - uLv\right)dV = \oint_S \kappa\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS\,. \quad (4)$$

Отдельно выпишем формулы Грина для случая, когда

$Lu \equiv \Delta u = \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,u\right)$, тогда

$$\int_D v\Delta u\,dV = \oint_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int_D \mathrm{grad}\,u\,\mathrm{grad}\,v\,dV \quad (5)$$

$$\int_D \left(v\Delta u - u\Delta v\right)dV = \oint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \qquad (6)$$

Разностные тождества и неравенства

Ранее было указано, что если схема аппроксимирует исходную задачу и устойчива, то она сходится, причем порядок точности схемы определяется ее порядком аппроксимации. Таким образом, изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к получению оценок для решения и для погрешности аппроксимации; Отметим, что решение y_h и погрешность аппроксимации ψ_h принадлежат различным пространствам и оцениваются, вообще говоря, в различных нормах.

Мы познакомились с некоторыми частными приемами исследования устойчивости разностной схемы $L_h y_h = f_h$ lля краевой задачи. Например, в теореме {Теорема. *Если коэффициенты разностной задачи*

$$a_k y_{k-1} + c_k y_k + b_k y_{k+1} = f_k,\ k = \overline{1, N-1}$$

$$y_0 = y_a, \quad y_N = y_b$$

удовлетворяют условиям

$$|c_k| \geq |a_k| + |b_k| + \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$$

то эта задача имеет единственное решение при произвольных y_a, y_b и f_k, причем имеет место оценка

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max\left[|y_a|, |y_b|, \frac{1}{\varepsilon} \max_k |f_k|, \right], \text{ где } \|y_h\|_{U_h} \leq \max_{0 \leq k \leq N} |y_k|. \}$$

были указаны условия на коэффициенты разностной задачи, при выполнении которых, разностная схема

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} - q(x_k) y_k = -f(x_k),\ k = \overline{1, N-1}$$

$$y_0 = y_a, \quad y_N = y_b$$

будет устойчивой в равномерной норме. Как быть, если для оценки устойчивости приходится выбирать другие нормы?

Далее мы познакомимся с математическим аппаратом, который позволит в общем случае изучать свойства разностных операторов, образующих схему, и получать оценки для этих операторов. Устойчивость схем можно будет устанавливать, используя полученные оценки.

Обозначения.

До сих пор мы рассматривали задачи на отрезке $[a,b]$ оси x. Сделав преобразование $x' = x - a$, можно перейти к рассмотрению задачи на отрезке $[0,l]$, где $l = b - a$. Обозначение $\bar{\omega}_h$ будем использовать для равномерной сетки на отрезке $[0,l]$, $\bar{\omega}_h = \left\{ x_k \middle| x_k = kh, k = 0,\ldots,N \right\}$, $Nh = l$, обозначение ω_h — для множества внутренних узлов этой сетки, $\omega_h = \left\{ x_k \middle| x_k = kh, k = 1,\ldots,N-1 \right\}$.

Введем обозначения для разностных производных в узле x_k:

$$y_{\bar{x},k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$$

для левой разностной производной в узлах $x_k \in \bar{\omega}_h \setminus \left\{ x_0 \right\}$;

$$y_{x,k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$

для правой разностной производной в узлах $x_k \in \bar{\omega}_h \setminus \left\{ x_N \right\}$;

$$y_{\bar{x}x,k} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

для второй разностной производной в узлах $x_k \in \omega_h$.

Очевидно, что

$$y_{x,k} = y_{\bar{x},k+1},\ y_{\bar{x},k} = y_{x,k-1},\ y_{\bar{x}x,k} = y_{x\bar{x},k}$$

В дальнейшем индекс k будем часто опускать. Вводя обозначение $y^{\pm 1} = y_{k\pm 1}$, приведенные выше формулы для разностных производных можно переписать так:

$$y_{\bar{x}} = \frac{y - y^{-1}}{h},\ y_x = \frac{y^{+1} - y}{h},\ y_{\bar{x}x} = \frac{y^{+1} - 2y + y^{-1}}{h^2}.$$

Скалярные произведения и нормы.

Пусть U_h — пространство сеточных функций, определенных на сетке ω_h.

Введем в этом пространстве скалярное произведение и норму

$$(y,v) = \sum_{k=1}^{N-1} y_k v_k h,\ \|y\| = \sqrt{(y,y)},\ y,v \in U_h = \{y_h | D(y_h) = \omega_h\}.$$

Следующие скалярные произведения введены в пространствах сеточных функций, в область определения которых не входит один из граничных узлов:

$$(y,v] = \sum_{k=1}^{N} y_k v_k h,\ \|y]| = \sqrt{(y,y]},\ y,v \in U_h = \{y_h | D(y_h) = \bar{\omega}_h \setminus \{x_0\}\}$$

$$[y,v) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k v_k h,\ |[y\| = \sqrt{[y,y)},\ y,v \in U_h = \{y_h | D(y_h) = \bar{\omega}_h \setminus \{x_N\}\}$$

Обозначим через $\overset{0}{U}_h$ пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $k=0$ и $k=N$. В этом пространстве скалярное произведение и норму можно ввести по любой из трех приведенных выше формул, поскольку

$$(y,v) = (y,v] = [y,v),\ \|y\| = \|y]| = |[y\|,\ \forall y,v \in \overset{0}{U}_h$$

Для отличия от введенных норм локальную норму будем обозначать индексом C:

$$\|y\|_C = \max_{0\le k\le N} |y_k|$$

Для всякой сеточной функции $y \in \overset{0}{U}_h$ справедливо неравенство

$$\|y\| \le \sqrt{l} \cdot \|y\|_C$$

Формулы разностного дифференцирования.

Формула дифференцирования произведения двух функций непрерывного аргумента $(y \cdot v)' = y' \cdot v + y \cdot v'$ имеет несколько аналогов разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций. Например:

$$(y \cdot v)_x = \frac{y_{k+1} \cdot v_{k+1} - y_k \cdot v_k}{h} = \frac{y_{k+1} \cdot v_{k+1} - y_k \cdot v_{k+1} + y_k \cdot v_{k+1} - y_k \cdot v_k}{h} =$$

$$= \frac{y_{k+1} \cdot v_{k+1} - y_k \cdot v_{k+1}}{h} + \frac{y_k \cdot v_{k+1} - y_k \cdot v_k}{h} = y_x \cdot v^{+1} + y \cdot v_x$$

$$(y \cdot v)_x = y_x \cdot v^{+1} + y \cdot v_x$$

Для правой разности можем записать еще одну формулу разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций

$$(y \cdot v)_x = \frac{y_{k+1} \cdot v_{k+1} - y_k \cdot v_k}{h} = \frac{y_{k+1} \cdot v_{k+1} - y_{k+1} \cdot v_k + y_{k+1} \cdot v_k - y_k \cdot v_k}{h} =$$

$$= \frac{y_{k+1} \cdot v_k - y_k \cdot v_k}{h} + \frac{y_{k+1} \cdot v_{k+1} - y_{k+1} \cdot v_k}{h} = y_x \cdot v + y^{+1} \cdot v_x$$

$$(y \cdot v)_x = y_x \cdot v + y^{+1} \cdot v_x.$$

Таким образом, окончательно

$$(y \cdot v)_x = y_x \cdot v^{+1} + y \cdot v_x = y_x \cdot v + y^{+1} \cdot v_x. \quad (7)$$

Аналогично для левой разности

$$\left(y\cdot v\right)_{\bar{x}} = y_{\bar{x}}\cdot v + y^{-1}\cdot v_{\bar{x}} = y_{\bar{x}}\cdot v^{-1} + y\cdot v_{\bar{x}}. \quad (8)$$

Формулы суммирования по частям.

В интегральном исчислении формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_0^l y\cdot v' dx = y\cdot v\Big|_0^l - \int_0^l y'\cdot v dx$$

Используя правило (7) разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций, получаем разностный аналог этой формулы — формулу суммирования по частям:

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(y\cdot v_x\right)_k h = \sum_{k=1}^{N-1}\left[\left(y\cdot v\right)_x - y_x\cdot v^{+1}\right]_k h = \sum_{k=1}^{N-1}\left(y\cdot v\right)_{x,k} h - \sum_{k=1}^{N-1}\left(y_x\cdot v^{+1}\right)_k h =$$

$$=\left(y\cdot v\right)_2 - \left(y\cdot v\right)_1 + \left(y\cdot v\right)_2 - \left(y\cdot v\right)_2 + \cdots + \left(y\cdot v\right)_N - \left(y\cdot v\right)_{N-1} - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{y_{k+1}-y_k}{h} v_{k+1} h =$$

$$=\left(y\cdot v\right)_N - \left(y\cdot v\right)_1 - \sum_{k=2}^{N}\frac{y_k - y_{k-1}}{h} v_k h =$$

$$=\left(y\cdot v\right)_N - \left(y\cdot v\right)_1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{y_k - y_{k-1}}{h} v_k h + \left(y_1 - y_0\right) v_1 =$$

$$=\left(y\cdot v\right)_N - y_0\cdot v_1 - \sum_{k=1}^{N}\left(y_{\bar{x}}\cdot v\right)_k h.$$

В итоге получим

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(y\cdot v_x\right)_k h = \left(y\cdot v\right)_N - y_0\cdot v_1 - \sum_{k=1}^{N}\left(y_{\bar{x}}\cdot v\right)_k h.$$

С учетом введенных нами обозначений получаем разностный аналог формулы интегрирования по частям:

$$\left(y, v_x\right) = y_N\cdot v_N - y_0\cdot v_1 - \left(y_{\bar{x}}, v\right]. \quad (9)$$

Аналогично можно получить еще одну подобную формулу с разностью назад:

$$\left(y, v_{\bar{x}}\right) = y_N\cdot v_{N-1} - y_0\cdot v_0 - \left[y_x, v\right). \quad (10)$$

Первая формула Грина.

Равенство

$$\int_0^l y\cdot\left(az'\right)'dx = -\int_0^l ay'z'dx + \left(ayz'\right)\Big|_l - \left(ayz'\right)\Big|_0$$

называют ***первой формулой Грина***.

Получим разностный аналог этой формулы для сеточных функций a, y, z. Подставляя функцию $v = az_{\bar{x}}$ в формулу суммирования по частям (9), получаем

$$\left(y,\left(az_{\bar{x}}\right)_x\right) = -\left(az_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}\right] + a_N y_N z_{\bar{x},N} - a_1 y_0 z_{\bar{x},1}.$$

Поскольку $z_{\bar{x},1} = z_{x,0}$, то для первой разностной формулы Грина получаем такое окончательное выражение:

$$\left(y,\left(az_{\bar{x}}\right)_x\right) = -\left(az_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}\right] + a_N y_N z_{\bar{x},N} - a_1 y_0 z_{x,0}. \quad (11)$$

Для $y \in \overset{0}{U}_h$ из формулы (11) следует

$$\left(y,\left(az_{\bar{x}}\right)_x\right) = -\left(az_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}\right]. \quad (12)$$

В частности, при $y \in \overset{0}{U}_h$ и $z = y$ имеем

$$\left(\left(ay_{\bar{x}}\right)_x, y\right) = -\left(a,\left(y_{\bar{x}}\right)^2\right]. \quad (13)$$

Вторая формула Грина.

В интегральном исчислении равенство

$$\int_0^l y\cdot\left(az'\right)'dx - \int_0^l z\cdot\left(ay'\right)'dx = a\left(yz' - zy'\right)\Big|_0^l$$

называется ***второй формулой Грина.*** Чтобы получить ее разностный аналог, напишем первую разностную формулу Грина для сеточных функций z и $ay_{\bar{x}}$:

$$\left(z,\left(ay_{\bar{x}}\right)_x\right)=-\left(ay_{\bar{x}},z_{\bar{x}}\right]+a_N z_N y_{\bar{x},N}-a_1 z_0 y_{x,0}$$

Вычитая последнее равенство из первой разностной формулы Грина (11), получаем разностный аналог второй формулы Грина:

$$\left(y,\left(az_{\bar{x}}\right)_x\right)-\left(z,\left(ay_{\bar{x}}\right)_x\right)=a_N\left(yz_{\bar{x}}-zy_{\bar{x}}\right)\Big|_N-a_1\left(yz_x-zy_x\right)\Big|_0$$

Если $y,z\in\overset{0}{U}_h$, то получаем равенство

$$\left(\left(ay_{\bar{x}}\right)_x,z\right)=\left(y,\left(az_{\bar{x}}\right)_x\right),$$

означающее самосопряженность оператора $\Lambda y=\left(ay_{\bar{x}}\right)_x$.

Неравенство Коши—Буняковского.

Для любого линейного пространства, в котором введено скалярное произведение $\left(y,v\right)$ (в частности, для пространств сеточных функций с введенными выше скалярными произведениями), выполняется неравенство

$$\left|\left(y,v\right)\right|\le\|y\|\cdot\|v\| \qquad (14)$$

В самом деле, если $y=0$, то неравенство (14) очевидно. Пусть $y\neq 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен от вещественного аргумента λ:

$$\varphi\left(\lambda\right)=\left(\lambda y+v,\lambda y+v\right)=\lambda^2\left(y,y\right)+2\lambda\left(y,v\right)+\left(v,v\right)=$$

$$=\|y\|^2\lambda^2+2\left(y,v\right)\lambda+\|v\|^2.$$

При всех λ выполняется неравенство $\varphi\left(\lambda\right)=\|\lambda y+v\|^2\ge 0$. Следовательно, дискриминант уравнения $\varphi\left(\lambda\right)=0$ неположителен

$$\left(y,v\right)^2-\|y\|^2\cdot\|v\|^2\le 0$$

Откуда и следует неравенство Коши—Буняковского (14).

Из неравенства (14) следует неравенство, для сумм

$$\left|\sum_{k=m_1}^{m_2} y_k v_k h\right| \le \left(\sum_{k=m_1}^{m_2} y_k^2 h\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=m_1}^{m_2} v_k^2 h\right)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

$1 \le m_1 \le m_2 \le N-1$, которое также называется неравенством Коши—Буняковского.

ε —неравенство.

Для любых чисел a, b и $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|ab| \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \qquad (15)$$

Действительно,

$$\varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} - |ab| = \left(\sqrt{\varepsilon}\,|a| - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}|b|\right)^2 \ge 0.$$

Из ε-неравенства (15) и неравенства Коши—Буняковского в частности следует

$$|(y,v)| \le \|y\| \cdot \|v\| \le \varepsilon \|y\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|v\|^2.$$

Сеточный аналог теоремы вложения.

Напомним, что *пространством Соболева* $W_2^1(0,l)$ называется пространство, состоящее из функций пространства $L_2(0,l)$, имеющих на $(0,l)$ суммируемые с квадратом обобщенные производные первого порядка.

Из теорем вложения [*Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.] следует, в частности, что всякая функция из пространства $W_2^1(0,l)$ является непрерывной функцией на отрезке $[0,l]$. Кроме того, если функция $y \in W_2^1(0,l)$ обращается в нуль на концах отрезка $[0,l]$, то для нее справедлива оценка

$$\|y\|_{C[0,l]} \le \frac{\sqrt{l}}{2}\|y_x\|_{L_2(0,l)}. \quad (16)$$

Докажем сеточный аналог оценки (16). В следующей теореме утверждается, что локальную норму функции $y \in \overset{0}{U}_h$ можно оценить через норму ее производной.

Теорема 1. (сеточный аналог теоремы вложения). *Для всякой сеточной функции* $y \in \overset{0}{U}_h$ *справедливо неравенство*

$$\|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{\bar{x}}]| \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из равенств

$$\sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j}h = \sum_{j=1}^{k}\frac{y_j - y_{j-1}}{h}h = y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \cdots + y_k - y_{k-1} = y_k - y_0$$

получаем тождество

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j}h,\ k = 1,\ldots,N-1$$

Если взять сумму

$$\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j}h = \sum_{j=k+1}^{N}\frac{y_j - y_{j-1}}{h}h =$$

$$= y_{k+1} - y_k + y_{k+2} - y_{k+1} + \cdots + y_N - y_{N-1} = y_N - y_k,$$

то будем иметь другое тождество

$$y_k = -\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j} h$$

Далее запишем $l y_k^2$ в виде

$$l y_k^2 = \left(l - x_k\right) y_k^2 + x_k y_k^2 = \left(l - x_k\right)\left(\sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j} h\right)^2 + x_k \left(\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j} h\right)^2 \quad (18)$$

Перепишем квадрат первой суммы, учитывая неравенство Коши-Буняковского (*) и взяв $v_k \equiv 1$:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j} h\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j} v_j h\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j}^2 h\right)\left(\sum_{j=1}^{k} v_j^2 h\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j}^2 h\right)\left(\sum_{j=1}^{k} h\right) = x_k \sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j}^2 h .$$

Вторая сумма оценивается аналогично

$$\left(\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j} h\right)^2 = \left(\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j} v_j h\right)^2 \le \left(\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j}^2 h\right)\left(\sum_{j=k+1}^{N} v_j^2 h\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j}^2 h\right)\left(\sum_{j=1}^{k} h\right) = \left(l - x_k\right) \sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j}^2 h$$

С учетом полученных неравенств из тождества (18) следует оценка

$$l y_k^2 \le \left(l - x_k\right) x_k \sum_{j=1}^{k} y_{\bar{x},j}^2 h + \left(l - x_k\right) x_k \sum_{j=k+1}^{N} y_{\bar{x},j}^2 h$$

или

$$l y_k^2 \le \left(l - x_k\right) x_k \left\| y_{\bar{x}} \right]\!|^2 .$$

Поскольку $\left(l - x_k\right) x_k \le \dfrac{l^2}{4}$, то для всех $k = 1, \ldots, N-1$ будет справедливым неравенство

$$l y_k^2 \le \frac{l^2}{4} \| y_{\bar{x}}]|^2$$

откуда и следует требуемая оценка (17), а именно $\|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2} \| y_{\bar{x}}]|$.

Теорема 2 (об оценках нормы производной). *Для всякой сеточной функции $y \in \overset{0}{U}_h$ справедливы неравенства*

$$\frac{4}{l^2}\|y\|^2 \le \| y_{\bar{x}}]|^2 \le \frac{4}{h^2}\|y\|^2$$

Доказательство. Используя неравенство $\|y\| \le \sqrt{l} \cdot \|y\|_C$ и оценку (17) из теоремы 1, получаем

$$\|y\|^2 \le l\|y\|_C^2 \le \frac{l^2}{4} \| y_{\bar{x}}]|^2$$

Следовательно,

$$\frac{4}{l^2}\|y\|^2 \le \| y_{\bar{x}}]|^2$$

С другой стороны, в силу неравенства $(a-b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ будем иметь

$$\| y_{\bar{x}}]|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h} \right)^2 h = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{N} (y_k - y_{k-1})^2 \le \frac{2}{h} \left(\sum_{k=1}^{N} y_k^2 + \sum_{k=1}^{N} y_{k-1}^2 \right) =$$

$= \frac{2}{h} \cdot 2\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 = \frac{4}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h = \frac{4}{h^2}\|y\|^2$, что и требовалось доказать.