Лекция 6

Априорные оценки решений разностных схем

Одним из способов получения априорных оценок является так называемый *метод энергетических неравенств.* Мы рассмотрим его на примере простейшей линейной краевой задачи.

Метод энергетических неравенств.

Пусть дифференциальная задача

$$y''(x) = -f(x),\ 0 < x < l$$

$$y(0) = y(l) = 0$$

аппроксимируется на равномерной сетке ω_h, разностной схемой

$$\overset{o}{A} y_k = y_{\bar{x}x,k} = \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = -f_k,\ k = \overline{1, N-1}$$

$$y_0 = y_N = 0$$

Умножим разностное уравнение на $y_k h$ и просуммируем по k:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} y_k h = -\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k h$$

Можно считать, что $f_0 = f_N = 0$, т. е. сеточная функция f_h лежит в пространстве $\overset{0}{U}_h$.

$\{$ Ранее было введено пространство сеточных функций $\overset{0}{U}_h$, заданных на сетке ω_h и равных нулю при $k = 0$ и $k = N$. В этом пространстве скалярное произведение и норму можно ввести по любой из трех формул, поскольку

$$(y,v) = (y,v] = [y,v),\ \|y\| = \|y]\| = \|[y\|,\ \forall y,v \in \overset{o}{U}_h$$

$$\left(y,v\right)=\sum_{k=1}^{N-1}y_k v_k h\,,\ \left\|y\right\|=\sqrt{\left(y,y\right)},\ y,v\in U_h=\left\{y_h\middle|D\left(y_h\right)=\omega_h\right\}$$

$$\left(y,v\right]=\sum_{k=1}^{N}y_k v_k h\,,\ \left\|y\right]\!\right|=\sqrt{\left(y,y\right]},\ y,v\in U_h=\left\{y_h\middle|D\left(y_h\right)=G_h\setminus\left\{x_0\right\}\right\}$$

$$\left[y,v\right)=\sum_{k=0}^{N-1}y_k v_k h\,,\ \left\|\left[y\right\|\right.=\sqrt{\left[y,y\right)},\ y,v\in U_h=\left\{y_h\middle|D\left(y_h\right)=G_h\setminus\left\{x_N\right\}\right\}$$

Для отличия от введенных норм локальную норму будем обозначать индексом C:

$$\left\|y\right\|_C=\max_{0\le k\le N}\left|y_k\right|.\}$$

Поэтому последнее равенство можно переписать в терминах скалярного произведения, введенного в $\overset{0}{U}_h$:

$$\left(y_{\bar{x}x},y\right)=-\left(f,y\right),\ \text{или}\ \left(-y_{\bar{x}x},y\right)=\left(f,y\right)$$

Используя равенство $\left(\overset{o}{A}y,y\right)=\left(-y_{\bar{x}x},y\right)=\left(y_{\bar{x}},y_{\bar{x}}\right]=\left\|y_{\bar{x}}\right]\!\right|^2$ из первой формулы Грина, получаем

$$\left\|y_{\bar{x}}\right]\!\right|^2=\left(f,y\right).$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского $\left|\left(x,y\right)\right|\le\left\|x\right\|\cdot\left\|y\right\|$, будем иметь так называемое *энергетическое неравенство*

$$\left\|y_{\bar{x}}\right]\!\right|^2\le\left\|f\right\|\cdot\left\|y\right\|. \qquad (1)$$

Используя неравенства $\dfrac{8}{l^2}\left\|y\right\|^2\le\left\|y_{\bar{x}}\right]\!\right|^2\le\dfrac{4}{h^2}\left\|y\right\|^2$ и полученное энергетическое неравенство, получаем оценку в среднеквадратичной норме:

$$\frac{8}{l^2}\cdot\left\|y\right\|^2\le\left\|y_{\bar{x}}\right]\!\right|^2\le\left\|f\right\|\cdot\left\|y\right\|.$$

Отсюда

$$\|y\| \le \frac{l^2}{8} \cdot \|f\| \qquad (2)$$

или

$$\|y\| \le \frac{1}{\delta} \cdot \|f\|, \qquad (3)$$

где $\delta = \dfrac{8}{l^2}$.

Используя теорему вложения (Теорема вложения. Для всякой сеточной функции $y \in \overset{0}{U}_h$ справедливо неравенство $\|y\|_C \le \dfrac{\sqrt{l}}{2} \cdot \|y_{\bar{x}}\|$) и неравенства (1), (2), можно получить априорную оценку для решения поставленной разностной задачи и в локальной норме:

$$\|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2} \cdot \|y_{\bar{x}}\| \le \|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2} \cdot \|y_{\bar{x}}\| \sqrt{\|f\| \cdot \|y\|} \le \frac{\sqrt{l}}{2} \cdot \sqrt{\|f\|} \cdot \frac{l}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\|f\|}$$

Следовательно

$$\|y\|_C \le \frac{l\sqrt{l}}{4\sqrt{2}} \cdot \|f\| \qquad (4)$$

Полученные неравенства (2) или (4) могут быть использованы для оценки сходимости исходной разностной схемы.

Для этого в разностное уравнение

$$y_{\bar{x}x,k} = -f_k$$

подставим проекцию $(y)_h$ решения дифференциальной задачи, то получим

$$(y)_{h,\bar{x}x,k} = -f_k + \psi_k$$

при этом для погрешности аппроксимации $\psi_k = L_h\left(y\right)_h - f_h$ справедлива оценка $\left\|\psi_k\right\|_{F_h} \le Ch^2$, которую с учетом формулы $\left\|f_h\right\|_{F_h} = \max\left[\left|y_a\right|,\left|y_b\right|,\max\limits_k\left|f_k\right|\right]$ для нормы функций из F_h и равенств $\psi_0 = \psi_N = 0$ можно переписать так:

$$\left\|\psi_k\right\|_C \le Ch^2 \qquad (5)$$

Вычитая теперь из второго уравнения первое, получаем уравнение для погрешности решения $z = \left(y\right)_h - y_h$:

$$z_{\bar{x}x,k} = \psi_k\,.$$

Для погрешности получили задачу того же типа, что и для y_k. Поэтому для z справедлива оценка (4):

$$\left\|z\right\|_C \le \frac{l\sqrt{l}}{4\sqrt{2}}\cdot\left\|\psi\right\|.$$

Отсюда с учетом неравенств $\left\|y\right\| \le \sqrt{l}\,\left\|y\right\|_C$ и (5) следует оценка

$$\left\|\left(y\right)_h - y_h\right\|_C \le C\frac{l^2}{4\sqrt{2}}h^2$$

т. е. решение разностной задачи равномерно сходится к решению дифференциальной задачи со скоростью $O\left(h^2\right)$.

Мы получили оценку скорости сходимости для очень простой модельной задачи. Достоинством рассмотренного метода энергетических неравенств является то, что он легко переносится на случай многомерных эллиптических уравнений, на случай переменных коэффициентов, на разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений, в том числе и на схемы на неравномерных сетках.

Метод операторных неравенств

Метод операторных неравенств является другим, также достаточно общим способом получения априорных оценок: решений разностных схем. Пусть разностная схема записана в виде операторного уравнения $Ay = f$, где A — линейный разностный оператор, действующий в конечномерном пространстве сеточных функций U_h. Посмотрим, какие априорные оценки для решения разностной задачи $Ay = f$ можно получить в зависимости от тех или иных свойств оператора A.

1. Пусть A — положительно определенный оператор, т. е.

$$\left(Ay, y\right) \geq \delta \left\|y\right\|^2, \ \forall y \in U_h.$$

Положительной определенности линейного оператора A, действующего в конечномерном пространстве, достаточно для существования обратного оператора A^{-1} [Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978]. Таким образом, в данном случае оператор A^{-1} существует и $y = A^{-1} f$.

Покажем, что для нормы обратного оператора справедлива оценка

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\delta} \qquad (*)$$

так как для произвольного $x \in U_h$ справедливо неравенство

$$\left(x, A^{-1}x\right) - \delta \left\|A^{-1}x\right\|^2 \leq \left\|A^{-1}x\right\| \cdot \left\|x\right\| - \delta \left\|A^{-1}x\right\|^2.$$

С другой стороны, обозначая $y = A^{-1} f$, получаем

$$\left(x, A^{-1}x\right) - \delta \left\|A^{-1}x\right\|^2 = \left(Ay, y\right) - \delta \left\|y\right\|^2 \geq 0.$$

Поэтому

$$\left\|A^{-1}x\right\|\cdot\left\|x\right\|-\delta\left\|A^{-1}x\right\|^2=\delta\left\|A^{-1}x\right\|\left(\frac{1}{\delta}\left\|x\right\|-\left\|A^{-1}x\right\|\right)\geq 0,$$

т. е.

$$\left\|A^{-1}x\right\|\leq\frac{1}{\delta}\left\|x\right\|.$$

Отсюда, в силу произвольности x, и следует неравенство (*). Используя это неравенство, получаем

$$\left\|y\right\|=\left\|A^{-1}f\right\|\leq\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|f\right\|\leq\frac{1}{\delta}\left\|f\right\|,$$

т. е. справедлива априорная оценка

$$\left\|y\right\|\leq\frac{1}{\delta}\left\|f\right\| \qquad (**)$$

Понятно, что эта оценка может быть использована для доказательства сходимости схемы $Ay_h=f$. В самом деле,

$$A\left(y\right)_h=f+\psi,$$

где ψ — погрешность аппроксимации схемы на решении дифференциальной задачи. В силу линейности оператора A,

$$Az=\psi,$$

где $z=\left(y\right)_h-y_h$ — погрешность решения. Использование оценки (**) приводит к неравенству

$$\left\|(y)_h - y_h\right\| \le \frac{1}{\delta}\|\psi\|,$$

откуда и следует сходимость решения при $h \to 0$.

2. Пусть A — линейный самосопряженный и положительно определенный оператор. Тогда выражение

$$(x, y)_A = (Ax, y)$$

будет удовлетворять аксиомам скалярного произведения:

1) $(x, y)_A = (y, x)_A$ (следует из самосопряженности оператора A);

2) $(x + y, z)_A = (x, z)_A + (y, z)_A$;

3) $(\lambda x, y)_A = \lambda (x, y)_A$;

4) $(x, x)_A > 0$ при $x \ne 0$ (следует из положительности A), $(x, x)_A = 0$ при только при $x = 0$.

Поэтому в U_h можно ввести норму

$$\|y\| = \sqrt{(Ay, y)}, \qquad (+)$$

порожденную оператором A. Эта норма называется *энергетической,* а пространство U_h с введенной нормой (+) называется *энергетическим пространством.*

Получим оценку решения уравнения $Ay = f$ в энергетической норме. Используя неравенство Коши—Буняковского и доказанную выше оценку (**), будем иметь

$$\|y\|_A^2 = (Ay, y) = (f, y) \le \|f\| \cdot \|y\| \le \frac{1}{\delta}\|f\|^2,$$

т. е.

$$\|y\|_A^2 \le \frac{1}{\delta}\|f\|^2.$$

Эта априорная оценка может быть использована для доказательства сходимости приближенного решения в энергетической норме.

Замечание. Энергетическая норма сильнее локальной нормы. Покажем это на примере оператора $\overset{o}{A}$ второй разностной производной. Из оценки $\|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{\bar{x}}\|$ теоремы вложения и равенства $\left(\overset{o}{A} y, y\right) = \left(-y_{\bar{x}x}, y\right) = \left(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}\right] = \left\|y_{\bar{x}}\right]|^2$ следует

$$\|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{\bar{x}}\| = \frac{\sqrt{l}}{2}\sqrt{\left(\overset{o}{A} y, y\right)} = \frac{\sqrt{l}}{2}\|y\|_{\overset{o}{A}}$$

т. е. из сходимости в энергетической норме $\|\cdot\|_{\overset{o}{A}}$ следует сходимость в локальной норме $\|\cdot\|_C$