Лекция 5

Принцип максимума. Монотонизация разностных схем.

Рассмотрим разностную задачу Коши

$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\delta u}{\delta x} = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ -\infty < x < +\infty,$ (1)

где x - пространственная координата, t - время, $a = const > 0$ - скорость.

Возьмём в качестве базовой разностной схемы, схему по пространственной переменной вперед по потоку:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a\frac{u^n{}_{i+1} - u^n{}_i}{h} = 0,\ u_i^0 = u_0(ih), \qquad (2)$$

$i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots;\ n = 0, 1, \cdots, N.$

При исследовании аппроксимации будем использовать сеточную норму

$$\|u\|_h = \max_{i,n}|u^n{}_i| + \max_i|u_0(x_i)|.$$

Предположим, что задача (1) имеет ограниченные вторые производные в области G$= \{(x,t): 0 \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$, тогда

используя разложение по формуле Тейлора конечно-разностное уравнение можно записать в виде:

$$L_h u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{x_i,t_n} = 0$$

Тогда $\|L_h u - Lu\|_h \le \max\limits_{(x,t)\in G}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \cdot \frac{\tau}{2} + \max\limits_{(x,t)\in G}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \cdot \frac{h}{2}.$

Разностная схема (2) имеет первый порядок аппроксимации по τ и h на решении $u(x,t)$.

Используя метод дифференциального приближения, запишем Г-форму первого дифференциального приближения:

$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

Получим из Г-формы используя дифференциальное следствие из задачи (1), получим $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

Заменяя вторую производную по времени в Г-форме получим

$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -u\frac{h}{2}(1+\gamma)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ (3)

где $\gamma = a\frac{\tau}{h}$ - число Куранта.

Обозначим, через $\alpha = -a\frac{h}{2}(1+\gamma)$ это коэффициент численной диффузии.

Если ввести новые переменные $\tilde{x} = x - at$, $\tilde{t} = t$ и пусть $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) = u(x,t)$, тогда

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$.

При подстановки в (3) , получаем уравнение теплопроводности

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \alpha\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$, совместно с $u(x,0) = u_0(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

Получаем задачу Коши, точное решение выражается интегралом Пуассона:

$$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t}) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha\tilde{t}}}\exp\left(-\frac{(\tilde{x}-\beta)^2}{4\alpha\tilde{t}}\right)u_0(\beta)d\beta$$

Возвращаясь к старым переменным

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha t}}\exp\left(-\frac{(x-at-\beta)^2}{4\alpha t}\right)u_0(\beta)d\beta \qquad (4)$$

$\lim_{|\beta|\to\infty}\exp\left(-\frac{(x-at-\beta)^2}{4\alpha t}\right) = +\infty$, при $\forall\beta$.

Решение $u(x,t)$ неограничено.

Применим метод АИВ для (1), тогда получим

$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $u(x,0) = u_0(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

В разностном виде:

$$\frac{u^{n+1}{}_i - u^n{}_i}{\tau} + a\frac{u^n{}_{i+1} - u^n{}_i}{h} = \frac{1}{h}\left(\mu_{i+\frac{1}{2}}{}^{n+1}\frac{u_{i+1}{}^n - u_i{}^n}{h} - \mu_{i-\frac{1}{2}}{}^{n+1}\frac{u_i{}^n - u_{i-1}{}^n}{h}\right),$$

$u^0{}_i = u_0(ih)$, $i = 0, \pm1, \pm2, \cdots$; $n = 0, 1, \cdots, N$

Для простоты положим $\mu = \mu_{i+\frac{1}{2}} = \mu_{i-\frac{1}{2}}$, тогда

$$L_h u = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_{x_i t_n} = 0.$$

Если $\mu \sim h$, то оценка $\|L_h u - Lu\|_h \le \max_{(x,t)\in G}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \cdot \frac{\tau}{2} + \max_{(x,t)\in G}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \cdot \frac{h}{2}$

остается справедливой.

Г- форма имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

или $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\mu-a\frac{h}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

П-форма $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\mu-a\frac{h}{2}-a^2\frac{\tau}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha_\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

где $\alpha_\mu=\mu-a\frac{h}{2}(1+\gamma)$.

Тогда, чтобы решение вида (4) было ограничено, необходимо чтобы

$\alpha_\mu=\mu-a\frac{h}{2}(1+\gamma)\geq 0$, следовательно $\mu\geq a\frac{h}{2}(1+\gamma)$.

Используя принцип максимума,

найдем величину искусственной вязкости, чтобы схема была монотонной.

Перепишем разностную схему в виде:

$u_i^{n+1}=\mu\frac{\tau}{h^2}u_{i-1}{}^n+\left(1+\gamma-2\mu\frac{\tau}{h^2}\right)u_i{}^n+\left(-\gamma+\mu\frac{\tau}{h^2}\right)u_{i+1}{}^n$.

Согласно признаку монотонности (см. Н.Н. Калиткин) все коэффициенты должны быть не отрицательными, тогда получим следующие неравенства

$u_i{}^n:1+\gamma-2\mu\frac{\tau}{h^2}\geq 0,\ u_{i+1}{}^n:-\gamma+\mu\frac{\tau}{h^2}\geq 0$.

Разрешая эти неравенства относительно μ, получаем условия на искусственную вязкость, а именно

$\mu_{min}=ah\leq\mu\leq\frac{h^2}{2\tau}(1+\gamma)=\mu_{max}$.

Эти неравенства выполняются при $0<\gamma\leq 1$ – условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви.

Можно исследовать разностную схему на устойчивость по методу Фурье, тогда неравенства на искусственную вязкость примет вид:

$\mu_{min}=ah\leq\mu\leq\frac{h^2}{2\tau}A=\mu_{max}$,

где $A=\frac{2(1+\gamma(1-cos\varphi))(1-cos\varphi)+\sqrt{1-\gamma^2(1-cos^2\varphi)}}{2(1-cos\varphi)^2}$.

Согласно теоремы Лакса: из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

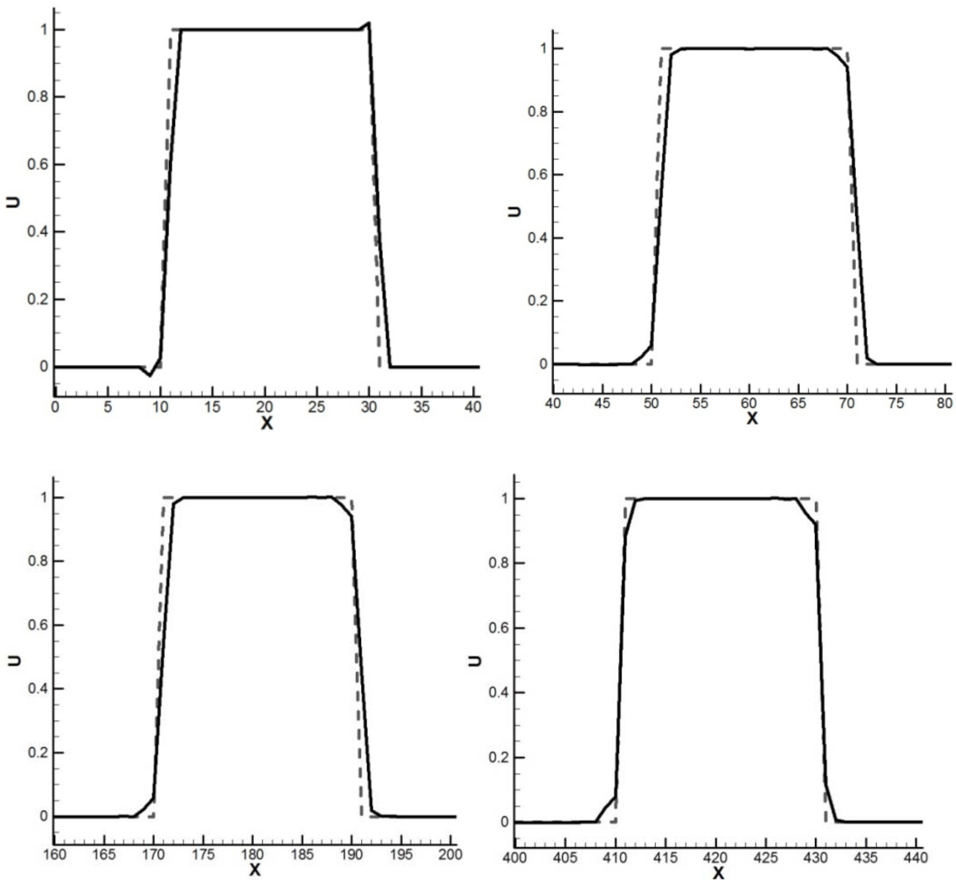
Искусственная вязкость вводится при выполнении условия

Искусственная вязкость вводится при выполнении условия, что произведение разностных производных

$$\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{h}\cdot\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{h} < 0,\ x_i \in ОСЦ,$$

то есть когда разностные отношения имеют противоположные знаки.

В противном случае искусственная вязкость равна нулю.



Профили точного решения (серая штриховая линия) и численного решения (черная сплошная линия).