Лекция 4

Устойчивость в норме пространства L_2 и метод Фурье

Пусть разностная схема

$$\vec{u}^{\,n+1} = A\vec{u}^{\,n},\; n = 0,1,\ldots \quad (*)$$

аппроксимирует некоторую систему уравнений в частных производных, зависящих от m искомых функций $u^{(1)}(\vec{x}),\ldots,u^{(m)}(\vec{x})$, $m \ge 1$, $\vec{x}$ - радиус- вектор точки в L-мерном евклидовом пространстве R_L, $L \ge 1$, переменных $x_1,\ldots,x_L$ или $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_L)$.

Введем в рассмотрение множество функций $\vec{v}(x) = \left\{v^{(1)}(\vec{x}),\ldots,v^{(m)}(\vec{x})\right\}$, которые достаточно быстро убывают при $|x| \to \infty$, так что величина

$$\|\vec{v}\| = \left(\int\limits_{R_L} \left|\vec{v}(\vec{x})\right|^2 d\vec{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (**)$$

конечна.

Здесь $\left|v(x)\right|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m}\left|v^{(j)}(\vec{x})\right|^2$, $d\vec{x} = dx_1\ldots dx_L$.

Норма (**) также называется называется *квадратичной нормой.*

Прямое и обратное преобразование Фурье задаются формулами

$$F_k(\vec{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{L}{2}}}\int\limits_{R_L} e^{-i\vec{k}\vec{x}}\vec{v}(\vec{x})d\vec{x}, \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{L}{2}}}\int\limits_{R_L} e^{i\vec{k}\vec{x}}F_k(\vec{v})d\vec{k}$$

где $\vec{k}\vec{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_Lx_L$. Предположим теперь, что функция $\vec{v}(x)$ такова, что она удовлетворяет равенству Парсеваля

$$\int\limits_{R_L(\vec{x})} \left|\vec{v}(\vec{x})\right|^2 d\vec{x} = \int\limits_{R_L(\vec{k})} \left|\vec{F}_k(\vec{v})\right|^2 d\vec{k}$$

Это равенство означает, что преобразование Фурье *сохраняет норму.*

Теперь подставим в разностную схему (*) решение вида:

$$\vec{u}^n(\vec{x}) = \lambda^n \vec{U}_0 \exp\{i(k_1 x_1 + \ldots + k_L x_L)\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_L$ - вещественные волновые числа, $\vec{U}_0$ - постоянный вектор, и λ - комплексное число. Тогда мы получим уравнение:

$$\lambda \vec{U}_0 \exp\{i(k_1 x_1 + \ldots + k_L x_L)\} = G\vec{U}_0 \exp\{i(k_1 x_1 + \ldots + k_L x_L)\}$$

Сделав алгебраические преобразования, получим уравнение

$$(G - \lambda E)U_0 = 0 \quad (***)$$

Матрица G называется *матрицей перехода разностной схемы.*

Из равенства Парсеваля следует, что $\|A\| = \|G\|$. Теперь определим устойчивость исходной схемы схемы (*) в норме пространства L_2.

Определение. Схема (*) называется *устойчивой*, если при любых начальных данных $u^0(\vec{x})$, если выполняется оценка

$$\|\vec{u}^n\| \le M \|\vec{u}^0\|,$$

где M - постоянная, не зависящая от τ, h и n. Поскольку оператор A предполагается не зависящим от n, то устойчивость эквивалентна равномерной ограниченности степеней оператора A:

$\|A^n\| \le M$, $n = 1, 2, \ldots$

Это условие эквивалентно условию

$\|G^n\| \le M$, $n = 1, 2, \ldots$ (1)

Для того чтобы система (***) имела нетривиальное решение U_0, то есть $U_0 \ne 0$, необходимо условие:

$\det(G - \lambda E) = 0$

где E - единичная матрица. Это называется *характеристическим* *уравнением* разностной схемы.

Пуств $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ - корни характеристического уравнения, они являются собственными значениями матрицах перехода G. Пусть

$$R = \max_{1\le l\le m}\left|\lambda_l\left(G\right)\right|$$

где $\lambda_l\left(G\right)$ - l-*е* собственное значение матрициг G, $1\le l\le m$. Величина R называется *спектральным радиусом* матрицы G. В общем случае

$$R^n \le \left\|G^n\right\| \le \left\|G\right\|^n$$

С учетом (1) получаем из последнего неравенства следующее *необходимое* условие устойчивости:

$R^n \le M$, $\forall\vec{k}$

Отсюда

$$R \le M^{\frac{1}{n}},\ 0 < n \le \frac{T}{\tau}.$$

Существует некоторое значение $\Delta t > 0$, такое, что при $0 < \tau \le \Delta t$ величина $M^{\frac{\tau}{T}}$ ограничена линейным выражением вида $1 + C_2\tau$ (см. рис. 1).

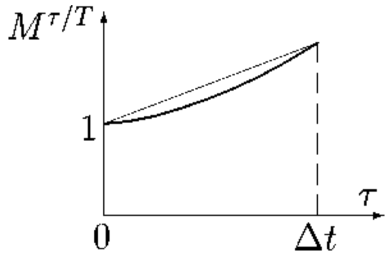

Рис. 1. Прямая $y = 1 + C_2\tau$ и кривая $y = M^{\frac{\tau}{T}}$

Так что $R \le 1 + C_2\tau$ для $0 < \tau \le \Delta t$. По определению спектрального радиуса получаем условие

$$\left|\lambda_i\right| \le 1 + O(\tau), \text{ для } 0 < \tau \le \Delta t,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \forall \vec{k} \in R_L\left(\vec{k}\right) \qquad (2)$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ - собственные значения матрицы G. Это условие называется *необходимым условием устойчивости фон Неймана.*

Известно, что $\|G\| = R$ для нормальных матриц G.

Матрица G называется *нормальной,* если

$G^* G = G G^*$,

где G^* - комплексно-сопряженная и транспонированная к G матрица. Пусть, для определенности, $G = \left\|a_{jk} + i b_{jk}\right\|_1^m$, где a_{jk}, b_{jk} - вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$. Тогда $G^* = \left\|a_{jk} - i b_{jk}\right\|_1^m$. Так что при выполнении (2) для нормальных матриц G имеем оценку

$$\left\|G^n\right\| = \|G\|^n = R^n \le \left(1 + C_2 \tau\right)^{\frac{T}{\tau}} \le e^{C_2 T}.$$

В соответствии с определением устойчивости приходим, таким образом, к выводу, что для нормальных матриц перехода условие устойчивости (2) является не только необходимым, но и *достаточным.*

Пример. Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0,\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

$$u_j^0 = u_0(jh),\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Подставим в нее решение вида $u_j^n = \lambda^n e^{ijk_1 h}$.

Получаем характеристическое уравнение вида:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{a}{h}\left(1 - e^{-ik_1 h}\right) = 0.$$

Обозначим через $\xi = k_1 h$ и $\gamma = \dfrac{a\tau}{h}$. Тогда из характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda - 1 + \frac{a\tau}{h}\left(1 - e^{-ik_1 h}\right) = \lambda - 1 + \gamma\left(1 - e^{-i\xi}\right) = 0\,.$$

Тогда

$$G = \lambda = 1 - \gamma\left(1 - e^{-i\xi}\right) = 1 - \gamma\left(1 - \cos\xi + i\sin\xi\right) = 1 - \gamma \cdot 2\sin^2\frac{\xi}{2} - \gamma i \sin\xi$$

$$|\lambda| = \sqrt{\left(1 - \gamma \cdot 2\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^2 + \left(\gamma\sin\xi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2} + \gamma^2\cdot\sin^2\xi} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2} + \gamma^2\cdot\left(\sin 2\frac{\xi}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2} + \gamma^2\cdot\left(2\cdot\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2} + \gamma^2\cdot 4\cdot\sin^2\frac{\xi}{2}\cos^2\frac{\xi}{2}} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2} + \gamma^2\cdot 4\cdot\sin^2\frac{\xi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\xi}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} - 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^4\frac{\xi}{2}} =$$

$$= \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^2\frac{\xi}{2}} = \sqrt{1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^2\frac{\xi}{2}}$$

$$|\lambda|^2 = 1 - 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} \le 1$$

$$|\lambda|^2 = -4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} + 4\cdot\gamma^2\cdot\sin^2\frac{\xi}{2} \le 0$$

$$\left|\lambda\right|^2 = 4\cdot\gamma\cdot\sin^2\frac{\xi}{2}\left(\gamma-1\right)\le 0.$$

Число Куранта по определению должно быть положительным, т.е. $\gamma \ge 0$, тогда величина $\gamma - 1 \le 0$, следовательно $\gamma \le 1$.

Откуда получаем известное условие устойчивости исходной разностной схемы: $0 \le \gamma \le 1$ (#)

Так как исследуемая разностная схема - скалярное двухслойное разностное уравнение, то для него, очевидно, $G^*G = GG^*$. Поэтому в случаях скалярных *двухслойных* разностных схем необходимое условие устойчивости является также и достаточным. Таким образом, неравенства (#) дают необходимое и достаточное условие устойчивости для рассматриваемой разностной задачи.

Теорема о сходимости

Пусть u_h - численное решение некоторой разностной схемы, полученное на пространственно-временной сетке с шагами $\left(\tau, h\right)$. Пусть $\left(u\right)_h$ - точное решение дифференциальной задачи, спроектированное на эту сетку.

Мы на предыдущих лекциях ввели определения.

Определение. Разностная схема называется *сходящейся*, если

$$\left\|u_h - \left(u\right)_h\right\| \to 0 \text{ при } \tau \to 0,\ h \to 0.$$

Если сверх того имеет место неравенство

$$\left\|u_h - \left(u\right)_h\right\| \le C\left(\tau^m + h^k\right)$$

то говорят, что схема сходится с порядком m по τ и k по h.

Свойство сходимости - это именно то, что нужно от разностной схемы. Однако, в большинстве случаев непосредственная проверка сходимости невозможно, так как мы не знаем точного решения задачи. На помощь приходит следующая теорема.

Теорема (Лакс, 1956 г.). Для обеспечения сходимости численного решения схемы к решению исходной задачи с порядком p достаточно, чтобы разностная схема аппроксимировала на решении с порядком p и была устойчива.

$$\boxed{Аппроксимыция^{p} + Устойчивость = Сходимость^{p}}$$

В связи с этим в дальнейшем при анализе схем мы всегда будем проверять аппроксимацию именно на решении.

Исследование устойчивости нелинейных разностных схем

Прием “замораживания” коэффициентов

Подавляющее большинство прикладных задач математической физики описывается нелинейными уравнениями в частных производных или интегро-дифференциальными уравнениями. Нелинейность существенно усложняет характер развития вычислительной неустойчивости. Поэтому для исследования устойчивости нелинейных разностных схем нужны соответствующие методы.

Рассмотрим метод исследования устойчивости нелинейных разностных схем. Он основан на гипотезе о том, что неустойчивость начинается как малое локальное возмущение

[**Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, **1972. - 418** с].

Поэтому в качестве начального приближения при исследовании нелинейных разностных схем можно исследовать устойчивость *линеаризованных* разностных уравнений по методу Фурье.

Рассмотрим процедуру линеаризации разностных уравнений на примере конечно-разностной аппроксимации гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}\left(\vec{u}\right)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

где $\vec{u}$ - вектор-функция зависимых переменных, $\vec{F}\left(\vec{u}\right)$ - заданный вектор.

Предположим, что система (1) аппроксимируется нелинейной разностной схемой вида:

$$\vec{u}^{n+1} = A\left(\vec{u}^{n}, T_0\vec{u}^{n}, T_{\pm}\vec{u}^{n}, h, \tau\right), \qquad (2)$$

где T_0 и $T_{\pm}$ - операторы сдвига, по определению,

$$T_0\vec{u}\left(x,t_n\right)=\vec{u}\left(x,t_n+\tau\right),\ T_{+1}\vec{u}\left(x,t_n\right)=\vec{u}\left(x+h,t_n\right),$$

$$T_{-1}\vec{u}\left(x,t_n\right)=\vec{u}\left(x-h,t_n\right), \quad T_{\pm1}^{m}\vec{u}\left(x,t_n\right)=\vec{u}\left(x\pm mh,t_n\right),\ m=1,2,\ldots.$$

Теперь при исследовании устойчивости разностной схемы в точке $\left(x_i,t_n\right)$ предположим, что

$$\vec{u}_j^n=\left(\vec{u}^*\right)_i^n+\delta\vec{u}_j^n \quad (3)$$

где величина $\left(\vec{u}^*\right)_j^n$ представляет собой точное значение решения при $x=x_i,\ t=t_n$ на практике обычно берут в качестве $\left(\vec{u}^*\right)_j^n$ разностное решение на n-ом слое в точке $\left(x_i,t_n\right)$, то есть полагают $\left(\vec{u}^*\right)_j^n=\vec{u}_j^n$. Индекс j в (3) принимает все те значения, которые имеются в исходной нелинейной разностной схеме (2). Пусть, например, в (2) есть разделенная разность вида:

$$\Delta_i\vec{F}^n=\frac{\vec{F}\left(u_{i+1}^n\right)-\vec{F}\left(u_{i-1}^n\right)}{2h} \qquad (4)$$

Тогда линеаризуем разность (4) следующим образом:

$$\vec{F}\left(u_i^n\right)\approx\vec{F}\left(\left(\vec{u}^*\right)_i^n\right)+B\left(\left(\vec{u}^*\right)_i^n\right)\cdot\delta\vec{u}_j^n. \quad (5)$$

Дальнейшие члены разложения в ряд Тейлора мы отбросили в формуле (5), предполагая, что величины $\delta\vec{u}_j^n$ малы. Далее,

$$B\left(\left(\vec{u}^*\right)_i^n\right)=\frac{\partial\vec{F}\left(\vec{u}\right)}{\partial\vec{u}}$$

то есть $B\left(\left(\vec{u}^*\right)_i^n\right)$ - матрица Якоби.

Пусть

$$\vec{F}(\vec{u}) = \{F_1(\vec{u}), F_2(\vec{u}), \dots, F_m(\vec{u})\},\ \vec{u} = \left(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}\right),$$

$$B\left(\left(\vec{u}^*\right)_i^n\right) = \left\|b_{ij}\right\|_1^m$$

Тогда, по определению,

$$b_{ij} = \frac{\partial F_i(\vec{u})}{\partial u^{(j)}},\ i, j = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

Вид элементов (6) для случая одномерной системы уравнений Эйлера невязкой сжимаемой жидкости, которая имеет вид (1), представлен в дан, например, в книгах:

1. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциалвного приближения. Применение к газовой динамике. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. - 364 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.:Мир, 1980. - 616 с.

Подставляя приближенные представления вида (5) в (4), получим линейный разностный оператор:

$$\Delta_i \vec{F}^n = B\left(\left(\vec{u}^*\right)_i^n\right) \frac{\delta\vec{u}_{i+1}^n - \delta\vec{u}_{i-1}^n}{2h}$$

Проделав подобные операции линеаризации со всеми разностными операторами, входящими в схему (2), получим следующую *линейную* разностную схему:

$$H_0\left(\left(u^*\right)_i^n, T_\pm, h, \tau\right)\delta\vec{u}^{n+1} = H_1\left(\left(u^*\right)_i^n, T_\pm, h, \tau\right)\delta\vec{u}^n \quad (7)$$

где H_0 и H_1 — некоторые матричные разностные операторы. Предположим, что оператор H_0 обратим в узле x_i. Тогда мы можем разрешить уравнение (7) относительно $\delta\vec{u}^{n+1}$:

$$\delta\vec{u}^{n+1} = S\left(\left(u^*\right)_i^n, T_\pm, h, \tau\right)\delta\vec{u}^n \quad (8)$$

где $S\left(\left(u^*\right)_i^n, T_\pm, h, \tau\right) = H_0^{-1} \cdot H_1$

Теперь “заморозим” коэффициенты оператора шага S, считая их постоянными. Тогда приходим к случаю разностной схемы с постоянными коэффициентами, который мы рассматривали в предыдущей лекции.

Предположим, что в результате исследования устойчивости схемы (8) по методу Фурье мы получили локальный критерий устойчивости вида:

$$\tau \le \frac{h}{\varphi\left(\left(u^*\right)_i^n\right)} \quad (9)$$

где $\varphi\left(\left(u^*\right)_i^n\right)$ - некоторая известная функция. В случае уравнений Эйлера, например, функция $\varphi\left(\left(u^*\right)_i^n\right)$ может иметь вид:

$$\varphi\left(\left(u^*\right)_i^n\right) = \left|u_i\right| + c_i$$

где u_i - скорости газа в узле x_i, c_i - местная скорости звука в узле x_i. Так как условие устойчивости (9) является лиши необходимым условием устойчивости, то на практике исполвзуют условие устойчивости вида:

$$\tau \le \frac{\alpha h}{\varphi\left(\left(u^*\right)_i^n\right)}, \quad (10)$$

где коэффициент α называется “множителем надежности”; $0 < \alpha \le 1$, например, $\alpha = 0.95$.

Поскольку условие (10) должно выполняться в каждом узле x_i, то величину шага τ_{n+1}, необходимую для получения решения $\vec{u}^{n+1}$ по схеме (2), задают в виде:

$$\tau_{n+1} = \min_i \frac{\alpha h}{\varphi\left(\vec{u}_i^n\right)} \quad (11)$$

Таким образом, значение τ_{n+1} временного шага, вообще говоря, меняется при переходе с одного временного слоя на следующий слой.

Хотя формула (11) получена из линейного анализа устойчивости, надо отметить, что и на практике она неплохо работает. Дополнительную гибкость этой формуле придает наличие множителя α, конкретное значение которого подбирается эмпирическим путем.