Лекция 3

Литература

Юрий Иванович Шокин академик РАН 1994

1. Метод дифференциального приближения. Новосибирск, 1979

2. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск, 1985 (совместно с Н. Н. Яненко)

Аппроксимация и устойчивость

Как уже отмечалось в предыдущей лекции, конечно-разностные методы позволяют получать лишь приближенные решения задач Коши или начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Точность численного решения может быть проверена путем сравнения с некоторым точным аналитическим решением. Однако при исследовании сложных задач математической физики часто бывает невозможно найти в замкнутом виде аналитические решения даже при некоторых упрощающих предположениях. Как в этих случаях ответить на вопрос: будет ли построенная разностная схема давать приближенное решение исходной задачи для уравнения в частных производных? Для этой цели в теории разностных схем было введено понятие *аппроксимации*.

Рассмотрим линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

это уравнение называют по-разному: уравнение переноса, уравнение конвекции, уравнение адвекции.

Для обеспечения единственности его решения мы должны задать функцию $u(x,t)$ в некоторый момент $t = t_0$. Обычно выбирается значение $t_0 = 0$. Итак, предположим, что при $t = 0$ задана функция или начальное условие

$$u(x,0) = u_0(x),\ -\infty < x < +\infty .$$

То есть будем рассматривать задачу Коши и зададим начальный профиль решения в виде $u(0,x) = g(t)$, $0 \le t \le T$.

Для этой задачи рассмотрим разностную задачу

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0,\ u_i^0 = u_0(ih),\ u_0^n = g(t_n) \quad (*)$$

где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N$

таким образом, поставлена разностная начально-краевая задача.

Исследование аппроксимации всегда проводится с использованием некоторой *сеточной нормы.* Для задачи (*) удобно ввести норму в виде

$$\|u\|_h = \max_{i,n}\left|u_i^n\right| + \max_i\left|u_0(x_i)\right|$$

См. про эту норму **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. Введение в теорию. - М.: Наука, 1977. - 439 с.

Предположим, что решение задачи Коши имеет ограниченные вторые производные в области $G = \{(x,t) : 0 \le x \le b,\ 0 \le t \le T\}$. Тогда в соответствии с формулой Тейлора имеем:

$$\frac{u(x_i,t_n+\tau) - u(x_i,t_n)}{\tau} = \frac{\partial u(x_i,t_n)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_n+\eta)}{\partial t^2},$$

$$\frac{u(x_i,t_n) - u(x_i-h,t_n)}{h} = \frac{\partial u(x_i,t_n)}{\partial x} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(x_i-\xi,t_n)}{\partial x^2},$$

$$u\left(x_i,t_n+\tau\right)=u\left(x_i,t_n\right)+\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_n\right)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_n\right)}{\partial t^2}+O\left(\tau^3\right)$$

где ξ и η некоторые величины, зависящие от i, n, τ и h и удовлетворяющие неравенствам $0<\xi<h$, $0<\eta<\tau$. С помощью формул Тейлора левую часть уравнения (*) можно переписать в виде:

$$\left\|L_h u-Lu\right\|_h\leq\frac{\tau}{2}\cdot\max_{(x,t)\in G}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|+\frac{h}{2}\cdot\max_{(x,t)\in G}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|,$$

Шаги τ и h входят в оценку в виде степеней τ^1 и h^1. В этом случае говорят, что разностная схема из (*) имеет первый порядок аппроксимации по τ и h на решении $u\left(x,t\right)$, обладающем ограниченными вторыми производивши.

Из оценки следует, что

$$\lim_{\tau\to 0,h\to 0}\left\|L_h u-Lu\right\|_h=0.$$

Если предел имеет место, то, по определению, разностная задача *аппроксимирует* исходную "дифференциалиную"задачу.

Если, кроме того,

$$\left\|L_h u-Lu\right\|_h\leq C_1\tau^k+C_2h^m$$

где $k>0\,,m>0$ и постоянные C_1 и C_2 не зависят от τ и h, то, по определению, аппроксимация имеет порядок m относительно h и порядок k относителвно τ. В этом случае кратко пишут, что разностная схема имеет *порядок аппроксимации* $O\left(\tau^k\right)+O\left(h^m\right)$.

Алгоритм исследования аппроксимацию конкретной разностной схемы:

1. Задать точку $\left(x^*, t^*\right)$, относительно которой будут выполняться разложения в ряды Тейлора. В примере для разностной схемы уравнения переноса это была точка $\left(x^* = x_i, t^* = t_n\right)$.

2. Осуществить в разностной схеме разложения всех входящих в нее величин в ряды Тейлора относительно точки $\left(x^*, t^*\right)$. Пусть в результате получится некоторое уравнение вида

$$L_1 u = 0,$$

где L_1 - некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от τ и h.

3. Записать исходное уравнение в частных производных в виде $Lu = 0$.

4. Вычислить разность $Ru = L_1 u - Lu$, если $\|Ru\|_h = O\left(\tau^k\right) + O\left(h^m\right)$, где $k > 0, m > 0$, то это и означает, что аппроксимация имеет место, причем, с порядком $O\left(h^m\right)$ по пространственной переменной и с порядком $O\left(\tau^k\right)$ во времени.

Первое дифференциальное приближение

Рассмотрим теперь кратко понятие ***первого дифференциального приближения*** разностной схемы. Вернемся к уравнению $L_1 u = 0$. Это есть некоторое уравнение в частных производных, порядок которого выше порядка исходного дифференциального уравнения в частных производных. Например, в случае разностной схемы для уравнения переноса получаем с помощью разложений Тейлора до членов $O\left(h^2\right)$ и $O\left(\tau^2\right)$ включительно

$$L_1 u = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O\left(\tau^2\right) + O\left(h^2\right) = 0 \quad (**)$$

Считая, что коэффициенты при τ^2 и h^2 в (**) ограничены, пренебрежем величинами порядка малости $O\left(h^2\right)$ и $O\left(\tau^2\right)$. Теперь перепишем полученное таким образом дифференциальное уравнение в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (***)$$

Это уравнение, как видим, включает в себя *вторую производную по* t. В этой связи Ю. И. Шокин и Н. Н. Яненко в своей книге [2] дали дифференциальному приближению (2.9) наименование "Г-форма первого дифференциального приближения". Буква *Г* здесь есть первая буква слова *Гиперболический*, поскольку, (***) - уравнение гиперболического типа.

Если аккуратно выписать в (**) явный вид членов второго порядка малости по τ и h, то можно получить так называемое ***второе дифференциальное приближение*** разностной схемы. Аналогичным образом можно получить ***третье*** и т. д. дифференциальные приближения.

Первое дифференциальное приближение (п. д. п.) содержит в себе главный, или ведущий член аппроксимационной погрешности. Поэтому в теории дифференциальных приближений разностных схем [2] основное внимание сосредоточено на изучении п. д. п. В западной литературе метод дифференциального приближения имеет наименование “the method of modified equation”, то есть п. д. п. = modified equation.

Наряду с Г-формой п. д. п. можно ввести понятие П-формы п. д. п., или ***параболической*** формы п. д. п. Эта форма п. д. п. более удобна при изучении свойств разностной схемы. Покажем, как ее можно получить, исходя из Г-формы п. д. п. Для этого возьмем, в качестве примера, Г-форму п. д. п. (***).

Выразим производную u_{tt} через производные по пространственной переменной x с помощью исходного уравнения переноса. Из исходного дифференциального уравнения переноса имеем:

$$u_t = -au_x$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по t:

$$u_{tt} = -au_{xt} = -au_{tx} = -a\left(-au_x\right)_x = a^2 u_{xx}$$

Уравнения $u_{tt} = -au_{xt}$, $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ называются ***дифференциальными следствиями*** уравнения в частник производных. Заменяя в (***) производную u_{tt} с помощью дифференциального следствия по формуле $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ получим из (***) ***П-форму п. д. п.***

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2}a\left(1-\gamma\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

где $\gamma = a\dfrac{\tau}{h}$ - число Куранта. Введем обозначение

$$\mu = \frac{h}{2}a\left(1-\gamma\right)$$

и перепишем уравнение с учетом новых обозначений в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Нетрудно доказать, что коэффициент численной диффузии μ в последнем уравнении должен быть положительным для обеспечения ограниченности решения разностной задачи Коши. Для этого, при произвольной функции $u_0\left(x\right) = u\left(x,0\right)$, можно применить метод разделения переменных. А можно это сделать и несколько иначе. Введем новые переменные $X = x - at$, $t' = t$. Пусть $\tilde{u}(X, t') = u(x, t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} - a\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}.$$

Подставляя полученные производные в п. д. п. выражения $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} = \mu\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X^2}. \quad (1)$$

Точное решение задачи Коши (1) и $u(x, 0) = u_0(x)$, $-\infty < x < +\infty$ выражается интегралом Пуассона:

$$\tilde{u}(X, t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\mu t'}}\exp\left(\frac{-(X-\xi)^2}{4\mu t'}\right)u_0(\xi)\,d\xi$$

Возвращаясь к старым переменным получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\mu t}}\exp\left(\frac{-(x-at-\xi)^2}{4\mu t}\right)u_0(\xi)\,d\xi.$$

Если рассмотри предел

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\exp\left(\frac{-(x-at-\xi)^2}{4\mu t}\right) = +\infty$$

при фиксированных x и $t > 0$, а также отрицательных μ. Если убывание функции $u_0(\xi)$ при $|\xi| \to \infty$ не очень быстрое, так что

$$\exp\left(\frac{-(x-at-\xi)^2}{4\mu t}\right)u_0(\xi) \geq C > 0 \ \ \forall\xi,$$

то, решение $u(x,t)$ будет неограниченным при $\mu < 0$.

Посмотрим, что в действительности произойдет с разностным решением, если взять $\mu < 0$. Из формуле $\mu = \frac{h}{2} a(1-\gamma)$ следует, что $\gamma > 1$ при $\mu < 0$. Возьмем в качестве начального условия функцию $u_0(x)$ вида "ступеньки" (см. рис. 1). При $a > 0$ ступенька в решении исходной задачи Коши должна распространяться в положительном направлении оси x без изменения формы. Возьмем для определенности $\gamma = 1.02$. Через 20-30 шагов по времени относительная ошибка разностного решения превысит 300% (см. рис. 2). Амплитуда численного решения быстро растет с ростом t и происходит авост по переполнению. Такой режим счета называется *неустойчивым.* Возьмем теперь значение числа Куранта $\gamma = 0.995$. Тогда можно по предложенной разностной схеме считать сколь угодно большое число шагов по t (см. рис. 3). Таким образом, в этом случае счет по схеме *устойчив.* Условие устойчивости рассмотренной разностной схем имеет вид:

$$0 < \gamma < 1$$

Это условие называется ***условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви***.

Как можно исследоватв устойчивости разностной cxcmbi ? В настоящее время известно порядка 10 различных способов исследования устойчивости раз- hocthbix схем [6]. Один из них, основанный на п. д. п., мы уже, по существу, рассмотрели выше.

Наиболее распространенным является способ исследования устойчивости разностнвгх: схем по *методу Фурье.* Рассмотрим несколвко подробнее этот метод.

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0$$

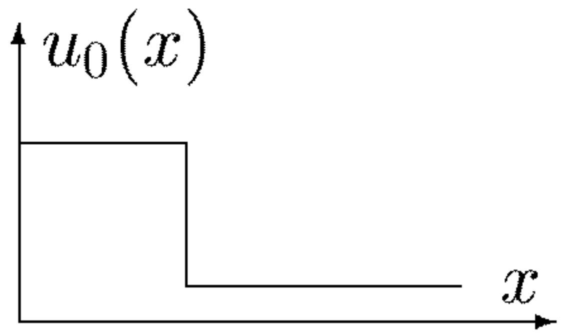

Рис. 1 График функции $u_0\left(x\right)$ в $u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right)$, $-\infty < x < +\infty$

для задачи о распространении ступеньки

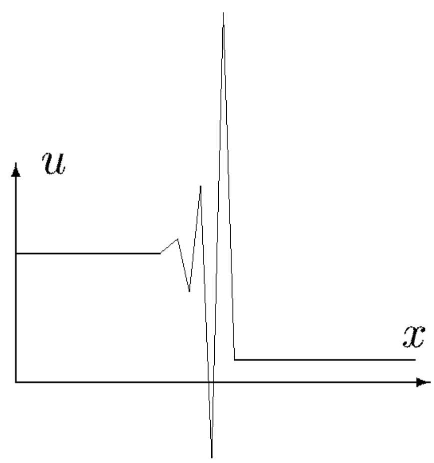

Рис. 2 График функции $u\left(x,t\right)$ при числе Куранта $\gamma = 1.02$

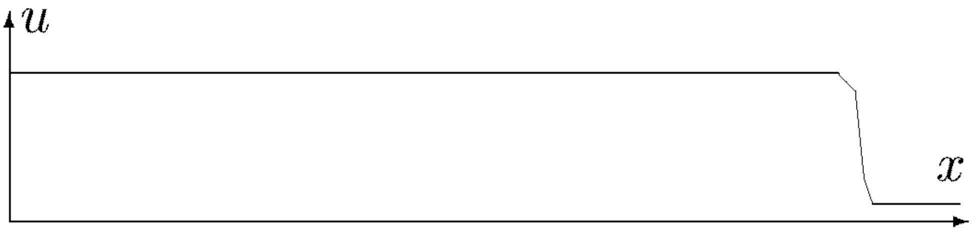

Рис. 3 График функции $u(x,t)$ при числе Куранта $\gamma = 0.995$