Лекция 2

Будем обозначать оператор дифференцирования, действующий в пространстве функций непрерывного аргумента через L, а в пространстве сеточных функций через L_h

Оценку близости непрерывной функции $u = u(x,t)$ и сеточной функции u_h будем проверять путем *проектирования* функции u в пространство сеточных функций. Оператор проектирования функции непрерывного аргумента на сетку $\Omega_{h,\tau}$ обозначается $(\ )_h$. В методе конечных разностей используется обычно следующие оператор проектирования:

1. В пространстве непрерывных функций $C[a,b]$

$$\left((u)_h\right)_i = u(x_i) = u_i .$$

2. В пространстве непрерывных функций $C[a,b]$

$$\left((u)_h\right)_i = \frac{1}{2}\left(u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i+\frac{h}{2}} + u_{i-\frac{h}{2}}\right)$$

3. В пространстве интегрируемых функций $L_1[a,b]$

$$\left((u)_h\right)_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_i-\frac{h}{2}}^{x_i+\frac{h}{2}} u(\alpha)\,d\alpha ,$$

а на границе

$$\left((u)_h\right)_0 = \frac{2}{h}\int\limits_{a}^{a+\frac{h}{2}} u(\alpha)\,d\alpha \text{ и } \left((u)_h\right)_N = \frac{2}{h}\int\limits_{b-\frac{h}{2}}^{b} u(\alpha)\,d\alpha .$$

В дальнейшем сеточные функции будем обозначать через переменную

$$\left((u)_h\right)_i = y_i .$$

Близость в пространстве сеточных функций определяется скалярной величиной – нормой $\| \ \|$.

Определение. Последовательность y сеточных функций сходится к u при $h \to 0$, если $\left\| y - (u)_h \right\| \to 0$.

Сформулированное определение корректно, если указанный предел единственный.

Определение. Некоторая норма сеточной функции Y и функции непрерывного аргумента U называются ***согласованными***, если для любой функции $u \in U$

$$\lim_{h\to 0}\|y\|_Y = \|u\|_U$$

Теорема. Если нормы в Y и U согласованы, то предел последовательности сеточных функций при $h \to 0$ является единственным.

Доказательство: Пусть y — последовательность сеточных функций, u и v — две функции, являющиеся пределами этой последовательности при $h \to 0$, т. е. выполняются условия

$$\lim_{h\to 0}\left\|(u)_h - y\right\|_Y = \lim_{h\to 0}\left\|(v)_h - y\right\|_Y = 0$$

Из соотношений

$$\left\|(u)_h - (v)_h\right\|_Y = \left\|(u)_h - y - \left((v)_h - y\right)\right\|_Y \le \left\|(u)_h - y\right\|_Y + \left\|(v)_h - y\right\|_Y$$

заключаем, что

$$\|u - v\|_U = \lim_{h\to 0}\left\|(u - v)_h\right\|_Y = \lim_{h\to 0}\left\|(u)_h - (v)_h\right\|_Y \le \left\|(u)_h - y\right\|_Y = 0$$

Следовательно, $u = v$, что и требовалось доказать.

Замечание. Условие согласованности для единственности предела последовательности сеточных функций существенно. Можно построить вариации сеточных норм с помощью умножения на h^p, $p > 0$, в которых, например, последовательность y, которая на каждой сетке равна тождественно единице, будет сходиться в смысле определения к произвольной функции u .

Примеры сеточных норм.

1. Наиболее распространенная сеточная норма C в пространстве непрерывных функций: $\left\|u_h^n\right\|_C = \max\limits_i \left|u_i^n\right| = \|y\|_C$ (чебышёвская норма) (для фиксированного временного слоя).

Эта норма согласована с равномерной нормой (доказательство может быть проведено через сравнение множества ступенчатых функций $\tilde{y}$, равных y на соответствующем участке, с функцией u на основе использования равномерной непрерывности функций, непрерывных на отрезке).

2. Нормы $\left\|u_h^n\right\|_2 = \|y\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n} h y_i^2}$, $\left\|u_h^n\right\|_2 = \|y\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} h y_i^2}$,

$\left\|u_h^n\right\|_2 = \|y\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n-1} h y_i^2}$ согласованы с $\|u\|_{L_2} = \left[\int |u|^2 d\mu\right]^{\frac{1}{2}}$

Определение. Пространство L_2 – это линейное гильбертово пространство измеримых функций, квадрат которых суммируем, с нормой $\|u\|_{L_2} = \left[\int |u|^2 d\mu\right]^{\frac{1}{2}}$.

(доказательство основано на сходимости квадратурных формул для функций указанного класса, что совпадает с исходной конструкцией интеграла Лебега как предела интегралов от последовательности ступенчатых функций).

3. Норма $\left\|u_h^n\right\|_2^* = \|y\|_2^* = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i^2}$ не согласована с $\|u\|_{L_2}$, так как при $h \to 0$ $(n \to \infty)$ эта сумма может расходиться, хотя $u \in L_2[a,b]$.

4. Норма $\left\|u_h^n\right\|_1 = \|y\|_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} h y_i$ согласованы с $\|u\|_{L_1} = \int |u| d\mu$.

Определение. Пространство L_1 - это пространство классов эквивалентности суммируемых функций на E с нормой $\|u\|_{L_1} = \int |u| d\mu$ |.

Вообще же выбор нормы определяется решаемой задачей и используемой разностной схемой.

Для введенных выше норм справедливы неравенства

$$\sqrt{h}\,\|y\|_C \le \|y\|_2 \le \sqrt{1+h}\,\|y\|_C \text{ и } \|y\|_1 \le \|y\|_2 \le \ldots \le \|y\|_C$$

Приведем доказательство второго неравенства

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |u|^p d\mu} \le \int_0^1 \max |u|^p = \max |u|^p = \|u\|_C$$

При этом каждое из неравенств является точным, т. е. существуют функции, на которых достигается равенство. Приведенная оценка представляет собой условие эквивалентности сеточных норм при фиксированном шаге сетки, но эквивалентность уже не имеет места в случае бесконечномерного пространства, элементами которого являются функции непрерывного аргумента.

Пример. Пусть $y_{h,i} = \begin{cases} 1 + h^{-\frac{1}{4}}, & i = 0 \\ 1, & i \ge 1 \end{cases}$,

для непрерывной функции $u \equiv 1$ имеем $\|y-u\|_2 \to 0$ при $h \to 0$. В то же время $\|y-u\|_C = \max\limits_i |y_i - u_i| = h^{-\frac{1}{4}} \to +\infty$ при $h \to 0$.

В дальнейшем для преобразования различных разностных выражений нам потребуются формулы разностного дифференцирования произведения, формулы суммирования по частям и разностные формулы Грина.

1) Формулы разностного дифференцирования произведения.

В дифференциальном исчислении имеет место следующая формула дифференцирования произведения функций

$$(uv)' = u'v + uv'$$

На прошлой лекции были введены две производные:

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \text{ и } y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

Соответственно этому имеются и две формулы разностного дифференцирования произведения:

$$(uv)_x = u_x v(x) + u(x+h)v_x = u_x v(x+h) + u(x)v_x \quad (1)$$

$$(uv)_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v(x) + u(x-h)v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v(x-h) + u(x)v_{\bar{x}} \quad (2)$$

Докажем формулу (1).

$$\frac{u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_i}{h} = \frac{u_{i+1}v_{i+1} - (u_i v_{i+1} - u_i v_{i+1}) - u_i v_i}{h} = \frac{u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_{i+1}}{h} + \frac{u_i v_{i+1} - u_i v_i}{h}$$

2) Формулы суммирования по частям.

Рассмотрим формулу интегрирования по частям

$$\int_0^1 uv'dx = uv\Big|_0^1 - \int_0^1 u'vdx$$

Для сеточных функций, как и в предыдущем случае, имеют место аналогичные формулы двух типов:

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v] \quad (3)$$

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v) \quad (4)$$

где $\left(u,v\right)=\sum_{i=1}^{N-1}u_i v_i h$, $\left(u,v\right]=\sum_{i=1}^{N}u_i v_i h$, $\left[u,v\right)=\sum_{i=0}^{N-1}u_i v_i h$ и $\left[u,v\right]=\sum_{i=0}^{N}u_i v_i h$ это аппроксимация скалярного произведения сеточных функций u и v. Выбор этих формул определяется решаемой задачей.

Докажем (3) используя формулу (1), получим

$$\left(u,v_x\right)=\sum_{i=1}^{N}u_i v_{x,i}h=\sum_{i=1}^{N}u_i\frac{v_{i+1}-v_i}{h}h=\sum_{i=2}^{N}u_{i-1}v_i-\sum_{i=1}^{N}u_i v_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}u_{i-1}v_i-u_0v_1+\sum_{i=1}^{N}u_i v_i+u_N v_N=-\sum_{i=1}^{N}v_i\left(u_i-u_{i-1}\right)+u_N v_N-u_0v_1.$$

Введем теперь ряд определений.

Определение. Величину $z=y-u_h$ или сеточную функцию, равную разности приближенного решения и проекции точного решения на сетку, будем называть ***погрешностью разностной схемы***.

Схема $L_h y=\varphi$ аппроксимирует исходную задачу $Lu=f$. Покажем близость функции y к функции u, т. е. малость z. При этом должны быть близки как операторы L_h и L, так и правые части φ и f.

Докажем близость функции y к функции u.

Запишем задачу для z, воспользовавшись соотношением $y=z+u_h$. Тогда

$$L_h z=\varphi+L_h z-L_h\left(z+u_h\right)=\left(\varphi-f_h\right)+\left(f_h+L_h z-L_h\left(z+u_h\right)\right)=\psi_h.$$

Здесь $\psi_h=\psi_h^{(1)}+\psi_h^{(2)}$, $\psi_h^{(1)}=\left(Lu\right)_h+L_h z-L_h\left(z+u_h\right)$, $\psi_h^{(2)}=\varphi-f_h$.

В случае линейного оператора L_h получаем, что для $\psi_h^{(1)}$ справедливо следующее равенство:

$$\psi_h^{(1)}=\left(Lu\right)_h-L_h u_h$$

Определение. Сеточная функция ψ_h называется ***погрешностью аппроксимации разностной задачи*** $L_h y = \varphi$ на решении исходной задачи $Lu = f$.

Определение. Сеточные функции $\psi_h^{(1)}$ и $\psi_h^{(2)}$ называются **погрешностью аппроксимации оператора** L разностным оператором L_h и **погрешностью аппроксимации правой части** соответственно.

Далеко не всегда есть возможность проверять малость погрешности аппроксимации на точном решении задачи. Во избежание этой трудности введем следующее понятие.

Определение. Назовем погрешностью аппроксимации разностной задачи $L_h y = \varphi$ сеточную функцию ψ_h, определяемую следующим образом:

$$\psi_h = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)},\ \psi_h^{(1)} = \left(Lv\right)_h - L_h v_h,\ \psi_h^{(2)} = \varphi - f_h.$$

Определяемая таким общим способом погрешность аппроксимации является просто разностью невязок разностной и дифференциальной задач на функции v: $\psi_h = \left(\varphi - L_h v_h\right) - \left(f_h - \left(Lv\right)_h\right)$.

Замечание 1. Данное определение не предполагает линейность разностного оператора, используемая в нем функция v — произвольная функция из области определения оператора L.

Замечание 2. Погрешность аппроксимации линейного разностного оператора L_h на точном решении исходной задачи задает правую часть разностного уравнения для погрешности разностной схемы.

3) Первая формула Грина.

$$\int_0^1 u\left(kv'\right)' dx = -\int_0^1 ku'v'dx + kuv'\Big|_0^1$$

Для сеточных функций аналог формулы Грина можно получить, пользуясь формулами суммирования по частям. Подставляя в (3)

$$u = z \text{ и } v = ay_{\bar{x}},$$

получаем первую разностную формулу Грина:

$$\left(z, \left(ay_{\bar{x}}\right)_x\right) = -\left(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}\right] + azy_{\bar{x}}\Big|_N - a_1 y_{x,0} z_0,$$

где $a_i = \dfrac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}$