Лекция 1

Сетки и сеточные функции. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Погрешность аппроксимации на сетке. Постановка разностной задачи. Повышение порядка аппроксимации разностной схемы. Аппроксимация краевых и начальных условий.

Будем рассматривать в этом курсе решение уравнений в частных производных.

Напомню основные типы линейных уравнений в частных производных для функции двух переменных с постоянными коэффициентами.

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu+f=0$$

или в индексной форме для n - переменных

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f\left(x_1,\ldots,x_n\right),$$

где a_{ij}, b_i, c, f - действительные коэффициенты, которые вообще говоря могут зависеть от независимых переменных x, y самой искомой функции u и ее производных, в этом случае уравнение называется нелинейным.

Если коэффициенты зависят от искомой функции и не зависят от ее производных, то такие уравнения называются квазилинейными.

Если $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0$, а $b_1\neq 0$ и $b_2\neq 0$, то имеем уравнение первого порядка, которое называется уравнением переноса.

Введем в рассмотрение определитель $\Delta=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ [1]

Если $\Delta>0$, то имеем уравнение гиперболического типа.

---

[1] Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с. стр 32-34

Если $\Delta = 0$, то имеем уравнение параболического типа, причем $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \neq 0$.

Если $\Delta < 0$, то имеем уравнение эллиптического типа.

приведем примеры выше перечисленных уравнений.

1. Уравнение переноса $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Выразим $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ и продифференцируем наше уравнение по переменной y, получим $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Получили уравнение колебаний. Проверим, что это уравнение гиперболического типа. Действительно $a_{11} = -1$, $a_{22} = 1$ и $a_{12} = 0$, тогда $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - (-1)\cdot 1 = 1 > 0$, следовательно это уравнение гиперболического типа, а так как уравнение колебания это следствие из уравнения переноса, то и уравнение переноса является уравнением гиперболического типа.

2. уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. в этом случае $a_{11} = -1$, $a_{22} = 0$ и $a_{12} = 0$, тогда $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1\cdot 0 = 0$, следовательно уравнение параболического типа.

3. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$ и когда уравнение неоднородное уравнение Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = -f$, тогда $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ и $a_{12} = 0$, тогда $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1\cdot 1 = -1 < 0$ уравнение эллиптического типа.

Эти уравнения будем рассматривать в дальнейшем в данном курсе.

Задача. Проверить: в случае двумерного установившегося потенциального течения сжимаемой жидкости, обтекающей тонкое тело, определяющее уравнение имеет вид $\left(1-M^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$. что уравнение эллиптическое в случае дозвукового течения – $M<1$, гиперболическое в случае сверхзвукового течения – $M>1$, параболическое в случае звукового течения – $M=1$.

Из этой задачи следует, что тип дифференциального уравнения тесно связан с физическими особенностями процесса, который описывает уравнение.

Для классификации систем дифференциальных уравнений в частных производных прибегают к характеристикам этой системы.

2. Корректно поставленная задача

Задача, связанная с решением определяющих уравнений вместе со вспомогательными (начальными и граничными условиями) является математически корректно поставленной, если выполняются следующие условия:

1) решение задачи существует,

2) решение является единственным,

3) решение непрерывно зависит от вспомогательных данных.

Вопрос о существовании решения обычно не создает, каких либо трудностей. Исключения составляет введение точных решений уравнения Лапласа, когда в некоторых изолированных точках решение может не существовать. (**Изолированная особая точка** — точка, в некоторой проколотой окрестности, в которой функция $f\left(z\right)$ однозначна и аналитична, а в самой точке либо не задана, либо не дифференцируема)

Так, например, оно не существует в центре источника, и т.д. На практике удается избежать столкновения с этой проблемой путем расположения источника за пределами вычислительной области (рассматривается процесс численного решения задачи).

Обычная причина неединственности решения связана с несоответствием вспомогательных условий типу определяющего ДУЧП. В общем случае недоопределение граничных условий приводит к неединственности, тогда как их переопределение приводит к получению нефизических решений вблизи соответствующей границы. Так, для уравнений Навье–Стокса хорошо известны условия на твердой границе (условия прилипания), однако существует некоторая неопределенность относительно надлежащего выбора граничных условий вдали от тела.

Третий из перечисленных выше критериев требует, чтобы малое изменение начальных или граничных условий влекло за собой лишь малое изменение решения. Довольно часто вспомогательные условия вводятся в типовой вычислительный алгоритм в приближенной форме. Следовательно, если третье условие не выполняется, то ошибки, введенные вместе со вспомогательными данными, будут распространяться во внутреннюю расчетную область, вызывая тем самым быстрый рост решения, особенно для гиперболических ДУЧП.

Вышеуказанные критерии обычно приписывают Адамару (1964 г.).

Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то ***задача*** называется ***некорректно поставленной.***

В дополнение можно провести простую параллель и потребовать для численно реализуемой задачи, чтобы для корректно поставленного расчета выполнялись следующие условия:

1) вычислительное решение существует,

2) вычислительное решение единственно,

3) вычислительное решение непрерывно зависит от приближенных вспомогательных данных.

Процесс построения вычислительного решения схематически можно представить в следующем виде см. рис. 1.

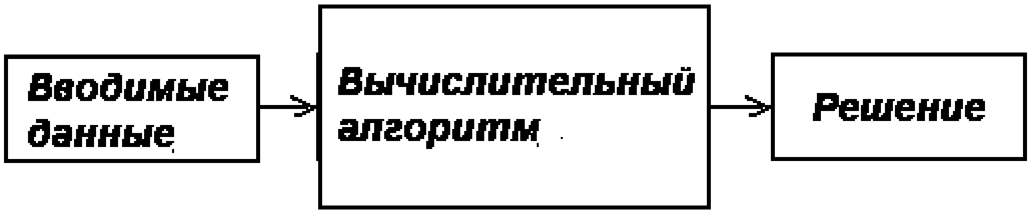

Рис. 1. Построение вычислительного решения

Здесь термин «вводимые данные» (этот термин был введен Самарским АА) соответствует приближенному представлению начальных и граничных условий. Вычислительный алгоритм, как правило, строится на основе определяющего ДУЧП и должен быть устойчивым, чтобы выполнялись все три 3 вышеприведенных условия. При этом подразумевается, что приближенное решение, полученное в результате корректно поставленного расчета, будет в определенном смысле близко к точному решению корректно поставленной задачи.

В итоге сформулируем следующее определение.

<u>Определение.</u> ***Задача*** называется ***корректно поставленной,*** если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то ***задача*** называется ***некорректно поставленной.***

3. Граничные и начальные условия

Вспомогательные данные являются в определенном смысле отправной точкой для получения внутреннего решения. Если мы не делаем различия между временем и пространством как независимыми переменными, то вспомогательные данные, вводимые на контуре $\partial\Omega$ (рис. 2), через посредство вычислительного алгоритма, основанного на ДУЧП, «экстраполируются», обеспечивая тем самым построение решения во внутренней области Ω

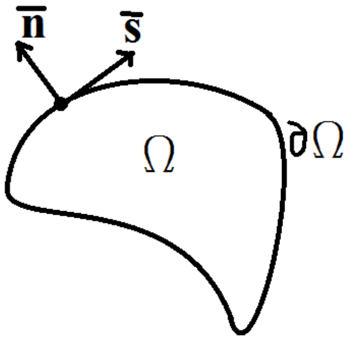

Рис. 2. Вычислительная область Ω

Вспомогательные условия определяются как относящиеся к одному из трех классов:

1) условие Дирихле, например $u = f$ на $\partial\Omega$,

2) условие Неймана (для производной) $\dfrac{\partial u}{\partial n} = f$ или $\dfrac{\partial u}{\partial s} = g$ на $\partial\Omega$,

3) смешанное условие (Робина), например $\dfrac{\partial u}{\partial n} + ku = f$, где $k > 0$ на $\partial\Omega$.

В этом курсе в основном будем рассматривать излагаемую теорию разностных схем в евклидово пространстве, а область непрерывного аргумента обозначим через G.

Евкли́дово простра́нство (также **эвкли́дово пространство**) в изначальном смысле — это пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность, равную 3, то есть является трёхмерным.

Чтобы дать определение евклидова пространства, в качестве основы проще всего использовать понятие скалярного произведения. Евклидово векторное пространство определяется как конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел, на парах векторов которого задана вещественнозначная функция $(\ , \ )$ обладающая следующими тремя свойствами:

- Билинейность: для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и для любых вещественных чисел α, β, справедливы соотношения

$$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})$$

$$(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x}, \vec{z})$$

- Симметричность: для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ верно равенство $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$

- Положительная определённость: $\left(\vec{x},\vec{x}\right)\geq 0$ для любого $\vec{x}$ причём $\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0$, при $\vec{x}=\vec{0}$

В одном из самых распространенных случаев область рассмотрения будет следующая $G=G\left(\vec{r},t\right)=G\left(\vec{r}\right)\times\left[0,T\right]$ Дополнительные условия, заданные на границе $t=0$, называют начальными, а заданные на границе Ω, или на поверхности G при произвольных t — краевыми, или граничными. В дальнейшем переменная t — является выделенной переменной и называется временем. Если область Ω не ограничена, то поставленная задача называется ***задачей Коши.*** Если в задаче есть время t и ограниченная область Ω, то поставленную задачу называют ***начально-краевой***, или ***смешанной.*** Если же времени t среди независимых переменных нет, то решают ***краевую задачу.***

Сетки и сеточные функции.

Вопрос с дискретизацией области Ω непрерывного аргумента решения задач рассмотрим отдельно на примере, четырехугольных регулярных сеток и неструктурированных треугольных позже.

Введем сейчас только основные определения.

Определение. Дискретное множество точек, «заменяющих» область G изменения независимых переменных с указанием связей между ними, называется ***сеткой.***

При этом точки сетки обычно называют ***узлами*** с координатами $\left(x_i,t_k\right)$ в одномерном случаи по пространственной переменной и $\left(x_i,y_j,t_k\right)$ в двумерном случаи, а расстояния между ними вдоль связей — ***шагами*** и по пространству обозначается h_x, h_y или Δx, Δy по пространству и τ или Δt по времени.

В дальнейшем, если не указано противное, ***сетку*** будем считать ***равномерной,*** т. е. такой, в которой шаги по каждой из переменных являются постоянными см. рис. 3.

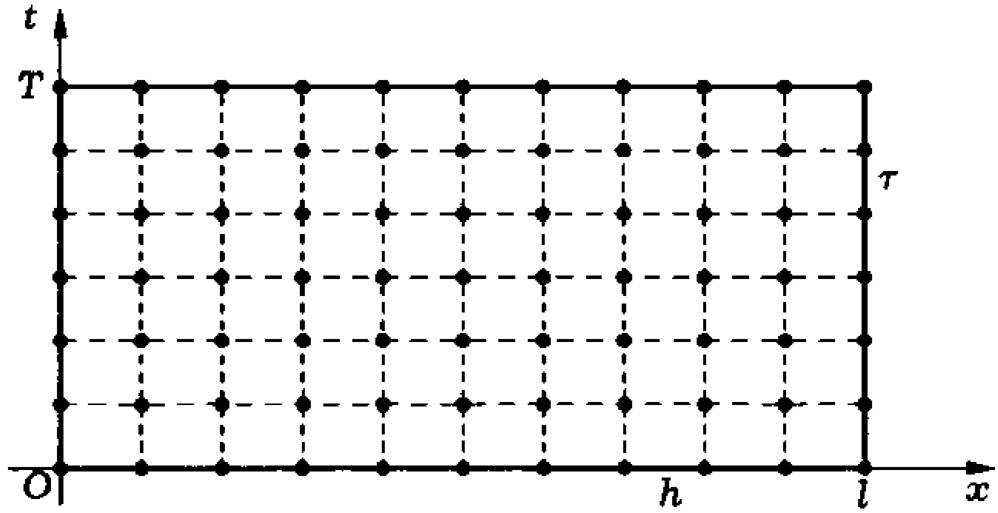

Рис 3. Равномерная сетка.

Определение. ***Функция***, определенная только в узлах сетки, называется ***сеточной.***

Далее, если не будет противоречий с обозначениями независимых переменных, y будет обозначать сеточную функцию, даже без указания индексов. При этом будем обозначать знаком y_i^k значение сеточной функции y в узле сетки с координатами $\left(x_i, t_k\right)$, т. е. $y_i^k = y\left(x_i, t_k\right)$ в случае области $G = \left[0, l\right] \times \left[0, T\right]$.

Определение. Алгебраические уравнения для сеточных функций, «заменяющие» уравнения и дополнительные условия исходной задачи и полученные путем замены производных в исходных уравнениях конечными разностями, интегралов — квадратурными формулами, прочих членов — алгебраическими соотношениями, называются ***разностной схемой.***

$Au = f$ в G,

Аналитическая функция вещественной переменной — функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения. Однозначная функция называется **аналитической в точке** , если сужение функции на некоторую окрестность является аналитической функцией. Если функция аналитична в точке , то она аналитическая в каждой точке некоторой окрестности точки .

Аналитическая функция вещественной переменной — функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения.

Однозначная функция называется **аналитической в точке** , если сужение функции на некоторую окрестность является аналитической функцией. Если функция аналитична в точке , то она аналитическая в каждой точке некоторой окрестности точки .

Однозначная аналитическая функция одной комплексной переменной — это функция , для которой в некоторой односвязной области , называемой областью аналитичности, выполняется одно из четырёх равносильных условий:

1. Ряд Тейлора функции в каждой точке сходится, и его сумма равна (*аналитичность в смысле Вейерштрасса*).
2. В каждой точке выполняются условия Коши — Римана и Здесь и — вещественная и мнимая части рассматриваемой функции. (*Аналитичность в смысле Коши — Римана*.)
3. Интеграл для любой замкнутой кривой (*аналитичность в смысле Коши*).
4. Функция является голоморфной в области . То есть комплексно дифференцируема в каждой точке .

В курсе комплексного анализа доказывается эквивалентность этих определений.

Определение 7.4. ***Функция***, определенная только в узлах сетки, называется ***сеточной.***

В дальнейшем через $\boldsymbol{h}$ будем обозначать шаг (может быть, с индексом) сетки по пространственным переменным, через т — шаг сетки по времени, а индексом $\boldsymbol{h}$ помечать разностные аппроксимации рассматриваемых операторов либо сеточные функции:

$A_h y = ip$ в Gh, $RhV = v$ на Гл, где y, tp