Лекция 13

Гипотезы о значении показателя.

Гипотеза о среднем

В предыдущем пункте мы рассмотрели гипотезу о среднем в случае, когда исследователю известна величина среднего квадратического отклонения генеральной совокупности σ. При этом условии принятие решение основывается на значении критерия $z = \dfrac{\overline{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, который подчиняется стандартному нормальному распределению.

В ситуации, когда σ неизвестна, проверка гипотез проводится с помощью t - критерия, $t = \dfrac{\overline{x} - m_0}{s / \sqrt{n}}$, подчиняющегося распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1$, где s обозначает выборочное среднее квадратическое отклонение. Критические значения t_α или $t_{\alpha/2}$ в зависимости от типа гипотезы ищутся по таблице распределения Стьюдента. Условием применимости критерия является приближенно нормальное распределение генеральной совокупности.

Пример. Автомат по продаже кофе должен наливать в стаканчик 250 г. Один из покупателей подозревает, что автомат недоливает. Для проверки своих подозрений он купил 5 стаканчиков и выяснил, что в среднем в стаканчики налито 226 г. при среднем квадратическом отклонении 16 г. При уровне значимости 0.1 проверить претензию покупателя.

1) $H_0 : m = 250$; $H_1 : m < 250$.

2) При $\alpha = 0.1$ одностороннее критическое значение распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1 = 5 - 1 = 4$ равняется $t_\alpha = -1.53$, рис. 1.

3) Рассчитываем значение критерия $t = \dfrac{\overline{x} - m_0}{s / \sqrt{n}} = \dfrac{226 - 250}{16 / \sqrt{5}} \approx -3.35$.

4) Принятие решения. Расчетное значение критерия меньше критического, $t \approx -3.35 < t_{\alpha} = -1.53$, основная гипотеза отклоняется.

5) Вывод. Наблюдение подтверждает предположение покупателя, что автомат недоливает кофе.

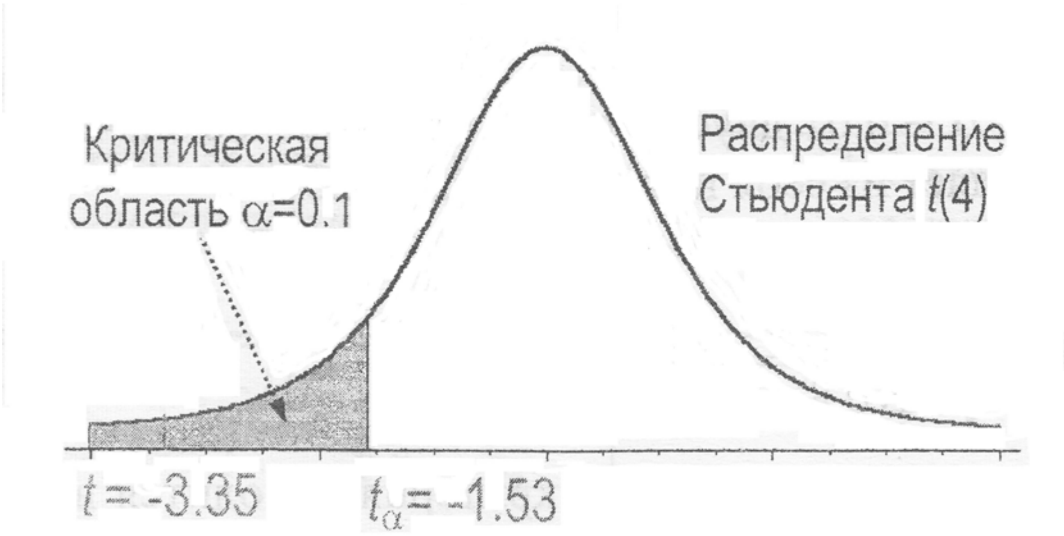

Рис. 1. *Проверка левосторонней гипотезы о работе автомата*

Следующий пример также иллюстрирует применение t - критерия для проверки гипотезы о среднем, но в случае двусторонней альтернативной гипотезы.

Пример. Управляющий агентства по прокату автомобилей утверждает, что средний пробег предлагаемых им в аренду автомобилей составляет 9500 км. Для отобранных случайным образом 8 автомобилей средний пробег составляет 9750 км при среднем квадратическом отклонении 600 км. Проверить при уровне значимости $\alpha = 0.05$ утверждение управляющего.

1) $H_0 : m = 9500$; $H_1 : m \neq 9500$.

2) При a $\alpha = 0.05$ двустороннее критическое значение для распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1 = 8 - 1 = 7$ равняется $t_{\alpha/2} = 2.36$, рис. 2.

3) Рассчитываем значение критерия $t = \dfrac{\overline{x} - m_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{9750 - 9500}{600/\sqrt{7}} \approx 1.1$

4) Принятие решение. Расчетное значение критерия попадает в некритическую область, $t \approx 1.1 < t_{\alpha} = 2.36$ -1.1 < 2.36, нулевая гипотеза не отклоняется.

5) Вывод. Выборочные данные согласуются с утверждением управляющего.

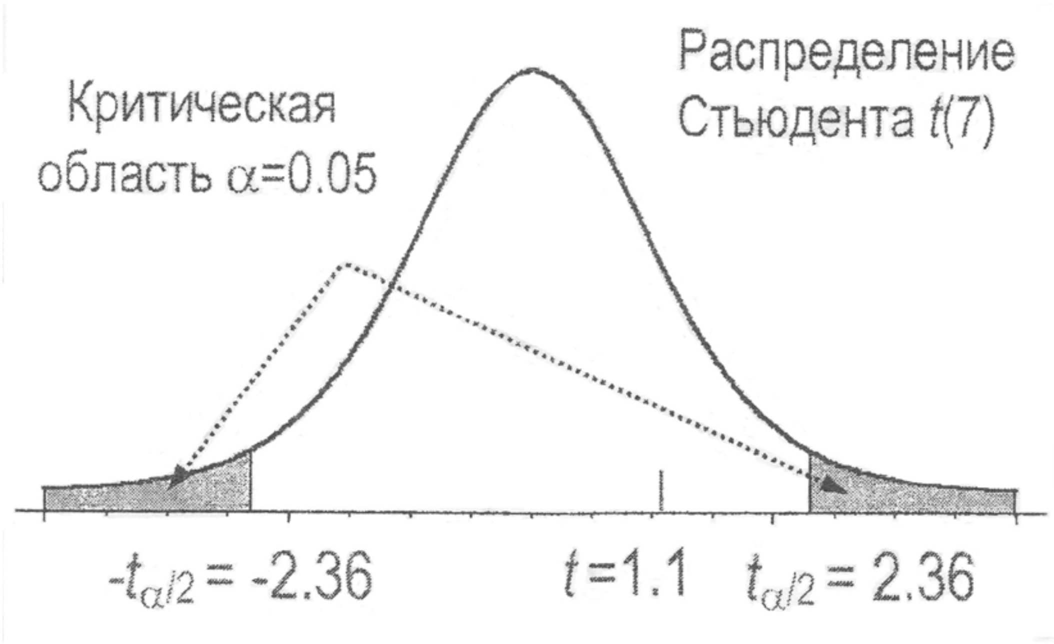

Рис. 2. *Проверка двусторонней гипотезы о пробеге автомобилей*

Гипотеза о доле (биномиальном параметре).

Гипотезы о значении доли p возникают при исследовании альтернативного признака генеральной совокупности и проверяются с помощью анализа выборочной доли, свойства которой были рассмотрены в разделе «Интервальные оценки».

Формулировки гипотез. Основная гипотеза утверждает, что генеральная доля p равна некоторому фиксированному значения p_0, а альтернативная, в зависимости от типа, что доля не равна этому значению, больше или меньше его, табл. 1.

Таблица 1. *Формулировки гипотез о доле*

Проверка двусторонней гипотезы	*Проверка правосторонней гипотезы*	*Проверка левосторонней гипотезы*

$H_0 : p = p_0$;	$H_0 : p = p_0$;	$H_0 : p = p_0$;
$H_1 : p \neq p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p < p_0$

Выборочная информация. Для проверки гипотез необходима следующая выборочная информация: n — длина выборки, k — доля единиц, обладающих признаком, $w = \frac{k}{n}$.

Критерий и условия применимости. При достаточно большом количестве наблюдений (порядка нескольких сотен) для проверки гипотез о доле можно применять z-критерий, подчиняющийся стандартному нормальному распределению: $z = \frac{w - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}$

Пример. Согласно оценкам телефонной компании, 20% ее клиентов готовы хотели бы иметь систему удержания вызова. Для проверки этого предположения отобраны 100 клиентов и выяснено, что среди них к данной услуге проявляют интерес 18%. При уровне значимости 0.01 проверить правильность оценки компании.

1) $H_0 : p = 0.2$; $H_1 : p \neq 0.2$.

2) При уровне значимости $\alpha = 0.01$ двустороннее критическое значение $z_{\alpha/2} = 2.58$, критическая область представляет из себя интервалы $|z| > 2.58$.

3) Рассчитываем значение критерия по выборке:

$$z = \frac{w - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}} = \frac{0.18 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2 \cdot (1 - 0.2)}{100}}} \approx 0.5$$

4) Принятие решение. Выборочное значение критерия находится в некритической области $z \approx 0.5 \in [-2.58, 2.58]$, основная гипотеза принимается.

5) Вывод. Результаты исследования подтверждают предположение

компании.

Гипотезы о сравнении значений показателей

Гипотеза о равенстве средних

Достаточно часто аппарат проверки гипотез применяется для сравнения двух значений показателя, например, в следующих случаях:

- компания-производитель хочет сравнить среднее количество единиц оборудования, поврежденных в процессе перевозки двумя транспортными компаниями;
- исследователь-медик хочет сравнить среднее давление у мужчин и женщин;
- преподаватель хочет сравнить средний результат тестов у студентов дневного и вечернего отделений.

Формулировки гипотез. Основная гипотеза утверждает, что средние генеральных совокупностей m_1 и m_2 равны, а альтернативные - что они не равны, одно из них меньше или больше, табл. 2.

Таблица 2. Формулировки гипотез о сравнении средних

Проверка двусторонней гипотезы	*Проверка правосторонней гипотезы*	*Проверка левосторонней гипотезы*
$H_0: m_1 = m_2$;	$H_0: m_1 = m_2$;	$H_0: m_1 = m_2$;
$H_1: m_1 \neq m_2$	$H_1: m_1 > m_2$	$H_1: m_1 < m_2$

В ряде случаев используются эквивалентные приведенным в таблице формулировки, относящиеся к значениям разности двух средних. Например, основная гипотеза представляет из себя утверждение $m_1 - m_2 = 0$, а альтернативная правая $m_1 - m_2 > 0$.

Выборочная информация. Для проверки утверждений о равенстве средних из каждой генеральной совокупности формируется выборка, которая характеризуется следующими величинами: n_1, n_2 - размер выборок; $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ -

выборочные средние; s_1^2, s_2^2 - выборочные дисперсии.

Критерий и условия применимости. Проверка гипотез основана на сравнении величин двух выборочных средних. Если отличия велики, значимы, то основная гипотеза отклоняется в пользу альтернативной. Если же выборочные средние отличаются незначительно, то принимается основная гипотеза, то есть утверждение, что генеральные средние двух совокупностей равны. Для принятия точного решения используется имеющий распределение Стьюдента t- критерий одного из двух видов, в зависимости от того, равны ли между собой или нет дисперсии двух генеральных совокупностей, табл. 3. Это исследование должен быть проведено до начала сравнения средних, например, с помощью критерия Фишера.

Таблица 3. Критерии проверки гипотез о равенстве средних

А) Дисперсии генеральных совокупностей равны	*Б) Дисперсии генеральных совокупностей не равны*
$t = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ Число степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$	$t = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2 + s_2^2}{n_1+n_2}}}$ Число степеней свободы $k = \min(n_1 - 1; n_2 - 1)$

Условия применимости метода является приближенно-нормальное распределение обеих генеральных совокупностей и *независимость выборок.* Условие независимости нарушается, например, если одна и та же группа пациентов обследуется до и после курса лечения или группа студентов проходит тестирование до и после прохождения некоторого учебного курса. В этом случае должен применяется специальный метод проверки для *зависимых выборок,* для них также использующий t- критерий.

Пример. Исследователь - социолог хочет определить, действительно ли средняя оплата медсестер в частных клиниках США выше, чем в государственных. Для проверки предположения проведено выборочное исследование и получены две выборки со следующими показателями:

Частные клиники	*Государственные клиники*
$n_1 = 10$; $\overline{x}_1 = 26\,800\$$; $s_1^2 = 600\$$	$n_2 = 8$; $\overline{x}_2 = 25\,400\$$; $s_2^2 = 450\$$

При уровне значимости 0.01 проверить правильность предположения, считая генеральные дисперсии равными.

1) Формулируем гипотезы $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

2) Находим критические значения. Так как генеральные дисперсии предполагаются равными, t- критерий будет иметь распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$. По таблице находим одностороннее критическое значение $t_\alpha = 2.358$, критическая область $t > t_\alpha = 2.358$, рис. 3.

3) Находим выборочное значение критерия

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{26800 - 25400}{\sqrt{\frac{(10-1)\cdot 600^2 + (8-1)\cdot 450^2}{10+8-2}}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}} \approx 5.47$$

4) Принятие решения. Значение критерия лежит в критической области $t \approx 5.47 > t_\alpha = 2.358$, Основная гипотеза отклоняется.

5) Вывод. Данные исследования подтверждают предположение, что средний уровень оплаты медсестер в частных клиниках выше, чем в государственных.

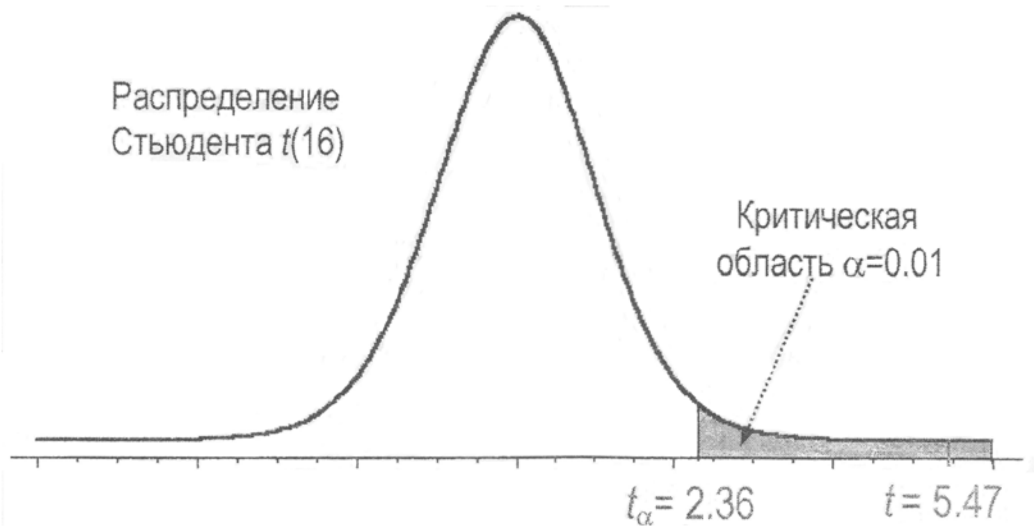

Рис. 3. *Проверка односторонней гипотезы о сравнении средних зарплат*

Гипотеза о равенстве долей (биномиальных параметров)

Гипотезы о том, что доли единиц, обладающих признаком, в двух генеральных совокупностях равны, возникают, например, при проверке следующих утверждений:

- Действительно ли доля мужчин, регулярно занимающихся спортом, выше, чем доля женщин?
- Действительно ли доля курящих среди студентов ниже, чем среди молодежи того же возраста, не обучающейся в вузах?
- Равны ли доли мужчин и женщин, пользующихся ремнями безопасности в автомобилях?

Формулировки гипотез. Основная гипотеза утверждает, что доли единиц, обладающих признаком, p_1 и p_2, равны, $H_0 : p_1 = p_2$. Альтернативная гипотеза может заключаться в том, что доли не равны $H_1 : p_1 \neq p_2$; первая доля больше второй, $H_1 : p_1 > p_2$ или первая доля меньше второй, $H_1 : p_1 < p_2$.

Выборочная информация. Решение относительно соотношения долей генеральных совокупностей принимается с помощью сравнения двух выборочных долей $w_1 = \frac{k_1}{n_1}$, $w_2 = \frac{k_2}{n_2}$, где k_1, k_2 - число единиц, обладающих признаком; n_1, n_2 - размер выборок.

Критерий и условия применимости. Количественно определить, насколько значимо отличаются выборочные доли, позволяет z - критерий:

$$z = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{\overline{w}\left(1-\overline{w}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, \text{ где } \overline{w} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

Критерий приближенно подчиняется стандартному нормальному распределению при условии независимости выборок и выполнении соотношений $n \cdot p > 5$, $n \cdot \left(1-p\right) > 5$ для каждой из них.

Пример. Выборка из 50 семей, в которых работают оба родителя показала, что в 36% из них дети посещают детский сад. Аналогичное исследование среди 80 семей, где работает только один из родителей, установило, что в этой группе детским садом пользуются только 25% опрошенных. Используя уровень значимости 0.01, установить, есть ли значимое различие между двумя группами.

Решение. Так как значения долей заданы в процентах, то сначала переведем их в числовое выражение, рассчитаем количество единиц, обладающих признаком, и вычислим среднюю долю:

$$w_1 = 0.36;\ k_1 = 0.36 \cdot 50 = 18;\ \ w_2 = 0.25;\ k_2 = 0.25 \cdot 80 = 20;\ \ \overline{w} = \frac{18+20}{50+80} = 0.292.$$

1) $H_0 : p_1 = p_2$; $H_1 : p_1 \neq p_2$.

2) Находим двустороннее критическое значение для z-критерия при уровне значимости $\alpha = 0.01$, $z_{\alpha/2} = 2.58$. Критическая область $\left|z\right| > z_{\alpha/2}$.

3) Вычисляем значение критерия:

$$z = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{\overline{w}\left(1-\overline{w}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.36-0.25}{\sqrt{0.292 \cdot \left(1-0.292\right)\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{80}\right)}} = 1.34.$$

4) Принятие решения. Значение критерия не попадает в критическую область, так как $z = 1.34 > z_{\alpha/2} = 2.58$, нулевая гипотеза не отклоняется.

5) Вывод. Результаты не подтверждают предположение, что доли семей, пользующихся детским садом, различны.