

Задание 7. Пространственно-одномерные стационарные линейные краевые задачи

Задание 7а. На основе примеров ex11a.c, ex11b.c решить смешанную краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_a, \quad u'(b) = u_b,$$

с коэффициентами

$$k(x) = 1 + \exp \left[-5 \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right], \quad q(x) = 1 - 0.5 \sin \left[8 \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right], \quad f(x) = q(x)u(x) - k'(x)u'(x) - k(x)u''(x),$$

с помощью алгоритма правой параллельной прогонки. Тестовую функцию выбрать самостоятельно. Оценить зависимость погрешности разностного решения от размера сетки. Оценить эффективность распараллеливания MPI-программы. Добавить распараллеливание по трэдам (технология MPI+OpenMP). Оценить эффективность распараллеливания MPI+OpenMP-программы.

Дополнительные задания

Задание 7б. На основе примеров ex11a.c, ex11b.c решить краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad a < x < b, \quad u'(a) = +\eta(u-1), \quad u'(b) = -\eta(u-1),$$

с коэффициентами

$$k(x) = 1 + \exp \left[-5 \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right], \quad q(x) = 1 - 0.5 \cos \left[8 \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right], \quad f(x) = q(x)u(x) - k'(x)u'(x) - k(x)u''(x),$$

и тестовой функцией:

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[\exp(-\eta(x-a)) + \exp(-\eta(b-x)) \right], \quad u'(x) = \frac{1}{2} \eta \left[-\exp(-\eta(x-a)) + \exp(-\eta(b-x)) \right],$$

с помощью алгоритма правой параллельной прогонки. Оценить зависимость погрешности разностного решения от размера сетки. Оценить эффективность распараллеливания MPI-программы. Добавить распараллеливание по трэдам (технология MPI+OpenMP). Оценить эффективность распараллеливания MPI+OpenMP-программы.

Задание 7в. На основе примера ex11a.c решить периодическую краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b),$$

с коэффициентами

$$k(x) = 1 + \left[\sin \left(\frac{\pi(x-a)}{(b-a)} \right) \right]^2, \quad q(x) = 1 + \left[\cos \left(\frac{\pi(x-a)}{(b-a)} \right) \right]^2, \quad f(x) = q(x)u(x) - k'(x)u'(x) - k(x)u''(x),$$

и тестовой функцией:

$$u(x) = \sin \left(\frac{\pi(x-a)}{(b-a)} \right), \quad u'(x) = \frac{\pi}{(b-a)} \cos \left(\frac{\pi(x-a)}{(b-a)} \right),$$

с помощью алгоритма параллельной циклической прогонки. Оценить зависимость погрешности разностного решения от размера сетки. Оценить эффективность распараллеливания MPI-программы. Добавить распараллеливание по трэдам (технология MPI+OpenMP). Оценить эффективность распараллеливания MPI+OpenMP-программы.

Задание 7г. На основе примера ex11a.c решить задачу с интегральными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad a < x < b, \quad \int_a^b u(x) \rho_0(x) dx = c_0, \quad \int_a^b u(x) \rho_1(x) dx = c_1,$$

с коэффициентами

$$k(x) = 1 + \exp\left(-\frac{x-a}{b-a}\right), \quad q(x) = 1 + \exp\left(\frac{b-x}{b-a}\right), \quad f(x) = q(x)u(x) - k'(x)u'(x) - k(x)u''(x),$$

$$\rho_0(x) \equiv 1, \quad \rho_1(x) = x - a,$$

и тестовой функцией:

$$u(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right), \quad u'(x) = \frac{1}{(b-a)} \operatorname{ch}\left(\frac{(x-a)}{(b-a)}\right),$$

$$\int_a^b u(x) \rho_0(x) dx = (b-a) [\operatorname{ch}(1) - \operatorname{ch}(0)] \equiv c_0, \quad \int_a^b u(x) \rho_1(x) dx = (b-a)^2 [\operatorname{ch}(1) - \operatorname{sh}(1)] \equiv c_1,$$

с помощью алгоритма параллельной интегральной прогонки. Оценить зависимость погрешности разностного решения от размера сетки. Оценить эффективность распараллеливания MPI-программы. Добавить распараллеливание по трэдам (технология MPI+OpenMP). Оценить эффективность распараллеливания MPI+OpenMP-программы.