# Семинар 14. Решение двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике с дыркой.

## 1. Постановка задачи.

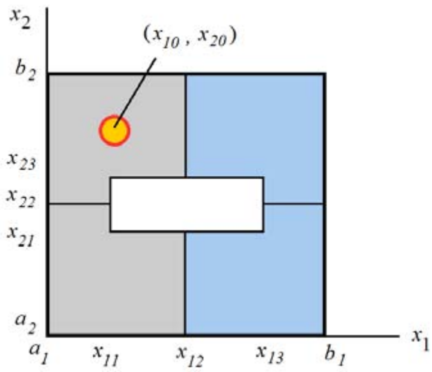
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-f(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D,$$

$$u(x_1,x_2)=0,\quad (x_1,x_2)\in\partial D_1;\quad \frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad (x_1,x_2)\in\partial D_2.$$

$$k(x_1,x_2)=\begin{cases}k_1, & x_1\le x_{12},\\ k_2, & x_1> x_{12},\end{cases}\quad x_{12},x_{22}=0.5,\quad k_1=1,\quad k_2=20;$$

$$f(x_1,x_2)=q_0\exp\left[-\left(\frac{x_1-x_{10}}{r_0}\right)^2-\left(\frac{x_2-x_{20}}{r_0}\right)^2\right],$$

$$x_{10}=0.25,\ x_{20}=0.75,\ r_0=0.15,\ q_0=10;$$
$$a_1=0,\quad x_{11}=0.2,\quad x_{13}=0.8,\quad b_1=1;$$
$$a_2=0,\quad x_{21}=0.4;\quad x_{23}=0.6,\quad b_2=1.$$




$$D=D_1/D_2,$$
$$D_1=[0,1]\times[0,1],$$
$$D_2=[0.2,0.8]\times[0.4,0.6]$$

## 2. Конечно-разностные схемы.

Равномерная сетка: $\Omega_1=\omega_{x_1}\times\omega_{x_2},\ \omega_{x_\alpha}=\{x_\alpha=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,\dots,N_\alpha,\ h_\alpha=1/N_\alpha\},\quad \alpha=1,2.$

Из нее конструируем сетки $\Omega_2=\Omega_1\bigcap D_2$ и $\Omega=\Omega_1/\Omega_2$.

Применяем метод нерегулярных шаблонов в узлах или ячейках.

### Узловая схема

$$\frac{1}{|V_{i_1,i_2}|}\iint\limits_{V_{i_1,i_2}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right]dx_1dx_2=-\frac{1}{|V_{i_1,i_2}|}\iint\limits_{V_{i_1,i_2}} f\,dx_1dx_2,$$

$$\frac{1}{|V_{i_1,i_2}|}\oint\limits_{\partial V_{i_1,i_2}}(\mathbf{W},\mathbf{n})\,dl\approx\frac{1}{|V_{i_1,i_2}|}\sum_{k=1}^{4}\left(\mathbf{W}^{(k)}_{i_1,i_2},\mathbf{n}^{(k)}_{i_1,i_2}\right)l^{(k)}_{i_1,i_2}\approx-f_{i_1,i_2},$$

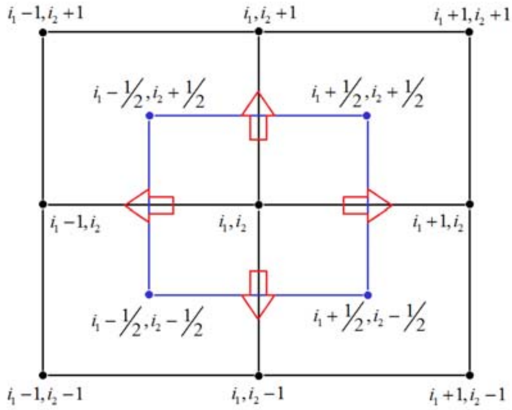
$$V_{i_1,i_2}=\left\{(x_1,x_2): x_{1,i_1-1/2}\le x_1\le x_{1,i_1+1/2},\ x_{2,i_2-1/2}\le x_2\le x_{2,i_2+1/2}\right\},\quad |V_{i_1,i_2}|=\hbar_1\hbar_2,$$

$$\mathbf{n}^{(1)}_{i_1,i_2}=(-1,0),\quad \mathbf{n}^{(2)}_{i_1,i_2}=(0,-1),\quad \mathbf{n}^{(3)}_{i_1,i_2}=(1,0),\quad \mathbf{n}^{(4)}_{i_1,i_2}=(0,1);$$

$$\frac{1}{\hbar_1}\left\{k_{i_1+1/2,i_2}\frac{y_{i_1+1,i_2}-y_{i_1,i_2}}{h_1}-k_{i_1-1/2,i_2}\frac{y_{i_1,i_2}-y_{i_1-1,i_2}}{h_1}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\hbar_2}\left\{k_{i_1,i_2+1/2}\frac{y_{i_1,i_2+1}-y_{i_1,i_2}}{h_2}-k_{i_1,i_2-1/2}\frac{y_{i_1,i_2}-y_{i_1,i_2-1}}{h_2}\right\}=-f_{i_1,i_2},\quad (i_1,i_2)\in\Omega,$$

$$y_{i_1,i_2}=0,\quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega_1;\quad \left(\mathbf{W}_{i_1,i_2},\mathbf{n}_{i_1,i_2}\right)=0,\quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega_2.$$




### Ячеистая схема

$$\frac{1}{|V_{i_1,i_2}|}\oint\limits_{\partial V_{i_1,i_2}}(\mathbf{W},\mathbf{n})\,dl\approx\frac{1}{|V_{i_1,i_2}|}\sum_{k=1}^{4}\left(\mathbf{W}^{(k)}_{i_1,i_2},\mathbf{n}^{(k)}_{i_1,i_2}\right)l^{(k)}_{i_1,i_2}\approx-f_{i_1-1/2,i_2-1/2},$$

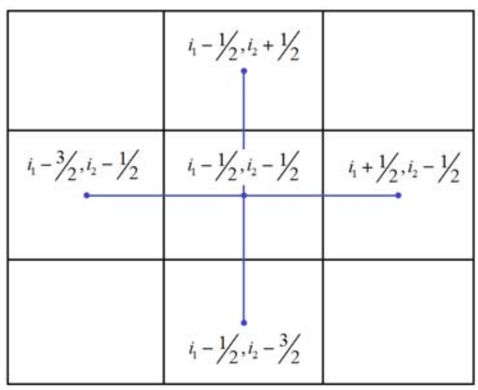
$$V_{i_1,i_2}=\left\{(x_1,x_2): x_{1,i_1-1}\le x_1\le x_{1,i_1},\ x_{2,i_2-1}\le x_2\le x_{2,i_2}\right\},\quad |V_{i_1,i_2}|=h_1h_2,$$

$$\frac{1}{h_1}\left\{k_{i_1,i_2-1/2}\frac{y_{i_1+1/2,i_2-1/2}-y_{i_1-1/2,i_2-1/2}}{\hbar_1}-k_{i_1-1,i_2-1/2}\frac{y_{i_1-1/2,i_2-1/2}-y_{i_1-3/2,i_2-1/2}}{\hbar_1}\right\}+$$

$$+\frac{1}{h_2}\left\{k_{i_1-1/2,i_2}\frac{y_{i_1-1/2,i_2+1/2}-y_{i_1-1/2,i_2-1/2}}{\hbar_2}-k_{i_1-1/2,i_2-1}\frac{y_{i_1-1/2,i_2-1/2}-y_{i_1-1/2,i_2-3/2}}{\hbar_2}\right\}=$$

$$=-f_{i_1-1/2,i_2-1/2},\quad (i_1,i_2)\in\Omega;\quad (*)$$

$$y_{i_1-1/2,i_2-1/2}=0,\quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega_1;\quad \left(\mathbf{W}_{i_1,i_2},\mathbf{n}_{i_1,i_2}\right)=0,\quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega_2.$$



**Метод маркеров и ячеек** – чаще всего используется для ячеистых схем и позволяет автоматизировать генерацию разностных уравнений в случае составной области и сложных граничных условий.
В нашем случае снабдим каждую ячейку маркером $m_{i_1,i_2}$, принимающим значения $0, \pm 1, \pm 2$. Нулевое значение маркера соответствует ячейкам сетки, не принадлежащим области (дыркам), "1" и "2" без учета знака соответствуют материалам "1" и "2". Знак "+" означает, что ячейка лежит внутри области, знак "-" – ячейка выходит на границу области.
Для определения типа и параметров уравнения в конкретной ячейке $(i_1, i_2)$ используется алгоритм:
1) если маркер $m_{i_1,i_2} = 0$, то уравнение в данной ячейке не формируется, вычисления не производятся;
2) если $m_{i_1,i_2} > 0$, то уравнение в данной ячейке используется в полном виде (*); при этом в вычислениях четырех потоков анализируются соответствующие соседние маркеры: $m_{i_1 \pm 1, i_2}$, $m_{i_1, i_2 \pm 1}$, по которым вычисляются значения коэффициента $k$: $k_{i_1-1,i_2-1/2}, k_{i_1,i_2-1/2}, k_{i_1-1/2,i_2-1}, k_{i_1-1/2,i_2} = k_1 \vee k_2 \vee \dfrac{2k_1k_2}{k_1+k_2}$;
3) если $m_{i_1,i_2} < 0$, то уравнение в данной ячейке используется в измененном виде:
- если $i_1 = 0, N_1$ или $i_2 = 1, N_2$, то $y_{i_1-1/2,i_2-1/2} = 0$;
- иначе в (*) будет отсутствовать один или несколько потоков.
Замечание: при реализации на C/C++ нумерация ячеек производится не с "1", а с "0"!!!

**3. Итерационный метод Якоби.**
**3.1. Узловая схема**
Эквивалентные уравнения:

$$\left(\frac{\hbar_2}{h_1}\left(\frac{2k_{i_1+1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1+1,i_2}+k_{i_1,i_2}}+\frac{2k_{i_1-1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1-1,i_2}+k_{i_1,i_2}}\right)+\frac{\hbar_1}{h_2}\left(\frac{2k_{i_1,i_2+1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2+1}+k_{i_1,i_2}}+\frac{2k_{i_1,i_2-1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2-1}+k_{i_1,i_2}}\right)\right)y_{i_1,i_2} -$$

$$-\frac{\hbar_2}{h_1}\frac{2k_{i_1+1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1+1,i_2}+k_{i_1,i_2}}y_{i_1+1,i_2}-\frac{\hbar_2}{h_1}\frac{2k_{i_1-1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1-1,i_2}+k_{i_1,i_2}}y_{i_1-1,i_2}-\frac{\hbar_1}{h_2}\frac{2k_{i_1,i_2+1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2+1}+k_{i_1,i_2}}y_{i_1,i_2+1}-\frac{\hbar_1}{h_2}\frac{2k_{i_1,i_2-1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2-1}+k_{i_1,i_2}}y_{i_1,i_2-1}=$$

$$=\hbar_1\hbar_2 f_{i_1,i_2}, \quad (i_1,i_2)\in\Omega; \quad y_{i_1,i_2}=g_{i_1,i_2}, \quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega.$$

Итерационный метод:

$$\overset{s+1}{y}_{i_1,i_2}=(1-\tau)\overset{s}{y}_{i_1,i_2}+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\hbar_2}{h_1}\left(\frac{2k_{i_1+1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1+1,i_2}+k_{i_1,i_2}}+\frac{2k_{i_1-1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1-1,i_2}+k_{i_1,i_2}}\right)+\frac{\hbar_1}{h_2}\left(\frac{2k_{i_1,i_2+1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2+1}+k_{i_1,i_2}}+\frac{2k_{i_1,i_2-1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2-1}+k_{i_1,i_2}}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\frac{\hbar_2}{h_1}\frac{2k_{i_1+1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1+1,i_2}+k_{i_1,i_2}}\overset{s}{y}_{i_1+1,i_2}+\frac{\hbar_2}{h_1}\frac{2k_{i_1-1,i_2}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1-1,i_2}+k_{i_1,i_2}}\overset{s}{y}_{i_1-1,i_2}+\frac{\hbar_1}{h_2}\frac{2k_{i_1,i_2+1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2+1}+k_{i_1,i_2}}\overset{s}{y}_{i_1,i_2+1}+\frac{\hbar_1}{h_2}\frac{2k_{i_1,i_2-1}k_{i_1,i_2}}{k_{i_1,i_2-1}+k_{i_1,i_2}}\overset{s}{y}_{i_1,i_2-1}+h_1h_2 f_{i_1,i_2}\right),$$

$$(i_1,i_2)\in\partial\Omega, \quad s=0,1,\ldots; \quad \overset{s+1}{y}_{i_1,i_2}=0, \quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega.$$

Начальное приближение: $\overset{0}{y}_{i_1,i_2}\equiv 0, \quad (i_1,i_2)\in\Omega_1.$

**3.2. Ячеистая схема**
Эквивалентные уравнения:

$$\left(k_{i_1,i_2-1/2}\frac{h_2}{\hbar_1}+k_{i_1-1,i_2-1/2}\frac{h_2}{\hbar_1}+k_{i_1-1/2,i_2}\frac{h_1}{\hbar_2}+k_{i_1-1/2,i_2-1}\frac{h_1}{\hbar_2}\right)y_{i_1-1/2,i_2-1/2}=$$

$$=k_{i_1,i_2-1/2}\frac{h_2}{\hbar_1}y_{i_1+1/2,i_2-1/2}+k_{i_1-1,i_2-1/2}\frac{h_2}{\hbar_1}y_{i_1-3/2,i_2-1/2}+k_{i_1-1/2,i_2}\frac{h_1}{\hbar_2}y_{i_1-1/2,i_2+1/2}+k_{i_1-1/2,i_2-1}\frac{h_1}{\hbar_2}y_{i_1-1/2,i_2-3/2}+$$

$$+h_1h_2 f_{i_1-1/2,i_2-1/2}, \quad (i_1,i_2)\in\Omega; \quad (**)$$

$$y_{i_1-1/2,i_2-1/2}=0, \quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega_1.$$

Обозначим:

$$A^{(1)}_{i_1 i_2} = k_{i_1-1,i_2-1/2}\frac{h_2}{\hbar_1},\quad B^{(1)}_{i_1 i_2} = k_{i_1,i_2-1/2}\frac{h_2}{\hbar_1},\quad A^{(2)}_{i_1 i_2} = k_{i_1-1/2,i_2-1}\frac{h_1}{\hbar_2},\quad B^{(2)}_{i_1 i_2} = k_{i_1-1/2,i_2}\frac{h_1}{\hbar_2},$$

$$C_{i_1 i_2} = A^{(1)}_{i_1 i_2} + B^{(1)}_{i_1 i_2} + A^{(2)}_{i_1 i_2} + B^{(2)}_{i_1 i_2},\quad F_{i_1 i_2} = h_1 h_2 f_{i_1-1/2,i_2-1/2}.$$

Итерационный метод для ячеистой схемы:

$$\overset{s+1}{y}_{i_1-1/2,i_2-1/2} = \overset{s+1}{y}_{i_1-1/2,i_2-1/2} + \tau C^{-1}_{i_1 i_2}\overset{s}{R}_{i_1 i_2},\quad (i_1,i_2)\in\Omega;\quad (***)$$

$$\overset{s}{R}_{i_1 i_2} \equiv A^{(1)}_{i_1 i_2}\overset{s}{y}_{i_1-3/2,i_2-1/2} + B^{(1)}_{i_1 i_2}\overset{s}{y}_{i_1+1/2,i_2-1/2} + A^{(2)}_{i_1 i_2}\overset{s}{y}_{i_1-1/2,i_2-3/2} + B^{(2)}_{i_1 i_2}\overset{s}{y}_{i_1-1/2,i_2+1/2} - C_{i_1 i_2}\overset{s}{y}_{i_1-1/2,i_2-1/2} + F_{i_1 i_2},$$

$$\overset{s+1}{y}_{i_1-1/2,i_2-1/2} = 0,\quad (i_1,i_2)\in\partial\Omega_1.$$

Использование маркеров.

Введем две функции:

$$k(m) = \begin{cases} 0, & m=0; \\ k_1, & m=1; \\ k_2, & m=2; \end{cases}\qquad k(m_1;m_2) = \begin{cases} 0, & m_1 \vee m_2 = 0; \\ k(m_1), & m_1 = m_2; \\ \dfrac{2k(m_1)k(m_2)}{k(m_1)+k(m_2)}, & m_1 \ne m_2. \end{cases}$$

$$k_{i_1,i_2-1/2} = k\left(m_{i_1 i_2}; m_{i_1+1 i_2}\right),\quad k_{i_1-1,i_2-1/2} = k\left(m_{i_1 i_2}; m_{i_1-1 i_2}\right);\quad k_{i_1-1/2,i_2} = k\left(m_{i_1 i_2}; m_{i_1 i_2+1}\right),\quad k_{i_1-1/2,i_2-1} = k\left(m_{i_1 i_2}; m_{i_1 i_2-1}\right).$$

**4. Параллельная реализация.**

Здесь главное правильно поделить область на компактные домены одинаковой мощности. Как это сделать автоматически?

**5. Реализация примера.**

**`Пример 1. Метод Якоби для узловой схемы (ex18a.c).`**

**`Пример 2. Метод Якоби для ячеистой схемы (ex18b.c).`**