Лекция 16. Решение экстремальных задач на МВС.

1. Постановки задачи.

Поиск минимумов и максимумов функций и функционалов.

1.1. Экстремум функции многих переменных.

$$f(x_1,...,x_m) \to Gf = 0$$

$$\Phi(u) \to \min, \quad u \in F(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m$$

1.2. Минимум функционала.

2. Методы решения:

а) градиентные; $u^{s+1} = u^s - \alpha\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u^s)\right](u^{s+1}-u^s), \quad u^0, \quad s=0,1,...$

МРЭЗ, ЧМРЭЗ - Васильев Ф.П.

б) координатные; $Gf(x_1,...,x_k,...,x_m)=0, \quad x_k \in D \subset \mathbb{R}^1$

в) стохастические; $\min\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^s\right\| \le C/\sqrt{M}$

г) гибридные.

3. Обобщение метода бисекции (метод Евтушенко).

см. метод неравномерных покрытий в Интернет

4. Метод кривых Пеано.

Применяется для задач умеренной размерности.

см. работы Гергель и др.

5. Метод Монте-Карло.

$l-\pi-\tau$ последовательности (автор проф. Соболь И.М.)

(http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=Paransys/par2_3.mod/?cou=Paransys/base.cou)

Алгоритм формирования LPTau последовательности

ЛПТау-последовательность является примером равномерно распределенной последовательности. Ее полное название - последовательность, любой двоичный участок которой представляет собой $\mathbf{\Pi}_\tau$-сетку. Приведем исходный алгоритм

1. Имеется таблица числителей направляющих чисел $\mathbf{r}_j^{(l)}$, $1 \le j \le 51$, $1 \le l \le 20$

2. Направляющие числа рассчитываются по формуле $\mathbf{V}_j^{(l)} = \mathbf{r}_j^{(l)}\ 2^{-l}$

3. В двоичной системе номер точки i записывается в форме $i=e_m...e_2e_1$, а декартовы координаты точки $Q_i=(q_{i,1},...,q_{i,n})$ вычисляются по единой формуле (j=1,2,..n):

$$q_{i,j}=e_1\mathbf{V}_j^{(1)} * e_2\mathbf{V}_j^{(2)} *...* e_m\mathbf{V}_j^{(m)} \quad (1)$$

где * означает поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе.

Арифметический алгоритм, реализованный на ЭВМ выглядит так

1. По заданному номеру i вычисляем m=1+[ln i/ ln 2]

2. Для j=1,2,...n вычисляем

$$q_{i,j}=\sum_{k=1}^{m} 2^{-k+1}\left\{\frac{1}{2}\sum_{l=k}^{m}[2\{i2^{-l}\}][2\{r_j^{(l)}2^{k-l-1}\}]\right\} \quad (2)$$

причем использовано обозначение [z] - целая часть числа, {z}- дробная часть числа z.

Алгоритм нахождения точек равномерно распределенной последовательности в произвольной области по известному распределению в единичном многомерном кубе.

Для *нахождения точек ЛПтау последовательности в произвольной области* используем следующие Леммы

Лемма 1 . Если точки $\mathbf{Q}_i$ с декартовыми координатами ($q_{i,1}$,,... $q_{i,n}$) образуют равномерно распределенную последовательность в $\mathbf{K}^n$, то точки $\mathbf{A}_i$ с декартовыми координатами ($\alpha_{i,1}$,,...$\alpha_{i,n}$) , где при j=1,2...n:

$\alpha_{i,j}=a_j+(b_j-a_j)q_{i,j}$ (9)

образуют равномерно распределенную последовательность в параллелепипеде Π, состоящем из точек $(\alpha_1,...\alpha_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \leq \alpha_j \leq b_j$

Лемма 2 . Пусть $A_1,..., A_i$ - последовательность точек , равномерно распределенных в Π, а $G \subset \Pi$ - произвольная область с положительным объемом $V_G > 0$. Если среди точек A_i отобрать все точки, принадлежащие G, то получим последовательность точек , равномерно распределенных в G.

Использование метода ЛПТау последовательности

Точки ЛПТау - последовательности в простейшем случае (один критерий) можно использовать как пробные в случайном поиске. Выбираем N точек, равномерно распределенных в рассматриваемой области, вычисляем значения функционала и находим точку , где он принимает минимальное значение.

Однако особый интерес использование этих последовательностей имеет в двух классах задач.

1. Задачи, в которых требуется одновременно оценить максимумы и (или) минимумы нескольких функций (это можно сделать по одним и тем же пробным точкам).

2. Задачи, в которых для отыскания глобального экстремума многоэкстремальной функции используют локальные методы оптимизации. При этом, чтобы не попасть вместо глобального экстремума в какой- либо из локальных, приходится повторять локальный поиск много раз, начиная с различных начальных точек. Очевидно, что начальные точки должны быть равномерно расположены. Самым эффективным способом выбора начальных точек оказалось использование точек ЛПТау - последовательности.