Лекция 15. Решение спектральных задач на МВС.

1. Линейные спектральные задачи в конечномерных пространствах:

$Ax = \lambda x, \quad x \neq \theta$. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}, \mathbb{C}^{N\times N}$.

Методы решения:

1) $\det|A - \lambda I| = 0$ – уравнение для поиска собственных значений. Используется при малой размерности матрицы.

2) частные Рэлея: $\inf\limits_{x\neq\theta}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \quad \sup\limits_{x\neq\theta}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \quad \inf\limits_{x\neq\theta}\frac{|(Ax,x)|}{(x,x)}, \quad \sup\limits_{x\neq\theta}\frac{|(Ax,x)|}{(x,x)}$. и $\sup\limits_{x\neq\theta}\frac{(Ax,x)}{(x,x)}$ – для оценки спектра.

3) Поиск спектра и собственных векторов для диагональных и треугольных матриц тривиален. Преобразование подобия $B = FAF^{-1}, \quad \det F \neq 0$ не меняет спектра матрицы: $Ax = \lambda x \quad <=> \quad By = \lambda y$.
Чтобы не вносить дополнительные ошибки округления, F должна быть унитарной: $F = U, \quad U^{-1} = U^*$. Унитарное преобразование сохраняет эрмитовость матриц: $A = A^* \quad => \quad B = B^*$. На основе этих идей созданы методы ***отражений (Хаусхолдера), Гивенса, Якоби***.

4) Метод ***обратных итераций со сдвигом*** для поиска пары (λ, ξ).
Будем предполагать, что собственные векторы $\boldsymbol{x}_m, \ 1 \le m \le N$ матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_m, образуют базис, а искомое собственное значение λ_M является простым. Пусть известно хорошее приближение $\tilde\lambda \approx \lambda_M$ и $\det|A - \tilde\lambda I| \neq 0$. Выберем вектор $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и $\lambda^{(0)} = \tilde\lambda$ и используем итерации:

$$\left(A - \lambda^{(s)} I\right)\boldsymbol{x}^{(s+1)} = \boldsymbol{x}^{(s)}, \quad \lambda^{(s+1)} = \lambda^{(s)} + \left(\boldsymbol{x}^{(s+1)}, \boldsymbol{x}^{(s)}\right) \Big/ \left(\boldsymbol{x}^{(s+1)}, \boldsymbol{x}^{(s+1)}\right), \quad \boldsymbol{x}^{(s+1)} = \boldsymbol{x}^{(s+1)} / \left\|\boldsymbol{x}^{(s+1)}\right\|, \quad s = 0,1,2,....$$

Сходимость итераций квадратичная, а для ортогонального базиса – кубическая.

5) Процедура ортогонализации и понижение размерности задач (см. Голуб «Матричные вычисления»).

6) QR и QZ – алгоритмы для решения полной задачи в вещественном и комплексном случаях.

2. Обобщенные линейные спектральные задачи в конечномерных пространствах:

$Ax = \mu Bx, \quad x \neq \theta$.

Если применить указанные выше методы для матрицы $C = B^{-1}A$, а затем перейти в них к A, то получим обобщенные методы решения.

3. Нелинейные по спектральному параметру задачи в конечномерных пространствах:

$A(\lambda)x = 0, \quad x \neq \theta$.

Пример: $Ax - P(\lambda)x = 0, \quad x \neq \theta, \quad P(\lambda) = P_m(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k \lambda^{m-k}$, C_k – матрицы.

1) Для поиска отдельных пар (λ, x) используется метод обратных итераций:
$\lambda^0, \lambda^1, x^0$ – два начальных приближения к собственному значению и одно к собственному вектору.

$$\forall\, n = 1,2,3,...: \quad \frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) \approx \frac{A(\lambda^n) - A(\lambda^{n-1})}{(\lambda^n - \lambda^{n-1})}, \quad x^{n,0} = x^{n-1}, \quad A(\lambda^n) y^{n,k+1} = -\frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) x^{n,k}, \quad x^{n,k+1} = \frac{y^{n,k+1}}{\left\|y^{n,k+1}\right\|},$$

$$(\delta\lambda)^{n,k+1} = \left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) x^{n,k}, \left[\frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) y^{n,k+1}\right]^*\right)\left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) y^{n,k+1}, \left[\frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\lambda^n\right) y^{n,k+1}\right]^*\right)^{-1}, \quad k = 0,1,...,k_0 - 1,$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + (\delta\lambda)^{n,k_0}, \quad x^{n+1} = x^{n,k_0}.$$

Фактически это комбинация метода обратных итераций для линейной задачи и метода Ньютона.

2) Метод Дэвиса – поиск всех нулей аналитической функции $f(\lambda) = \det A(\lambda)$ на комплексной плоскости. Определитель вычисляется с помощью LU разложения. Задача сводится к поиску корней полинома степени N, коэффициенты которого можно вычислить по рекуррентным формулам.

3) Комбинация методов позволяет решить полную задачу.

4. Нелинейные спектральные задачи в конечномерных пространствах:

$F(x, \lambda) = \theta, \quad F(\theta, \lambda) = \theta, \quad x \neq \theta$.

Обобщение предыдущего алгоритма в случае конечномерного пространства.

5. Спектральные задачи в бесконечномерных пространствах.

5.1. Примеры задач.

5.1.1. Задачи для линейного дифференциального уравнения 2го порядка с одной переменной

Простой случай:

$$u''+\lambda u=0,\quad 0<x<1;$$

$$u(0)=u(1)=0.$$

Общий случай:

$$Lu\equiv\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}+r_0u\right)+r_1\frac{du}{dx}-qu=-\lambda u,\quad 0<x<1.$$

Варианты граничных условий приведены в лекции 10.

5.1.2. Задачи для линейного дифференциального уравнения 2го порядка со многими переменными

Простой случай:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-\lambda u,\quad \vec{x}\in D=\{(x_1,x_2):0<x_\alpha<1,\alpha=1,2\}.$$

Общий случай:

$$Lu\equiv\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{m}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}+r_{0,\alpha\beta}u\right)\right)+\sum_{\alpha=1}^{m}\left(r_{1,\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-qu=-\lambda u,\quad \vec{x}\in D.$$

Варианты граничных условий приведены в лекции 14.

5.1.3 Задачи для интегральных уравнений

Простой случай:

$$\int_0^1 k(x,s)u(s)ds=\lambda u(x),\quad 0<x<1;$$

$$u(0)=u(1)=0.$$

Общий случай:

$$\int_D k(\mathbf{x},\mathbf{s})u(\mathbf{s})d\mathbf{s}+Lu(\mathbf{x})=-\lambda u(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in D.$$

Здесь L – алгебраический или дифференциальный оператор.

Варианты дополнительных условий приведены в лекции 14.

5.2. Методы решения

Методы решения спектральных задач в бесконечномерном пространстве связаны с дискретизацией и переходом к конечным базисам собственных функций.