

Лекция 13. Параллельные алгоритмы решения гиперболических уравнений.

1. Постановка начально-краевой задачи для одномерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \geq 0; \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Условие согласования данных: $u_0(0) = \mu(0)$, сами данные непрерывно-дифференцируемы.

Решение: $u(x, t) = u_0(x - at)$, $t \leq x/a$, $u(x, t) = \mu(t - x/a)$, $t \geq x/a$.

Зам. Если $x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow u(x, t) = u_0(x - at)$ – решение задачи Коши.

2. Разностные схемы

В ограниченной расчетной области $D = [0, x_{\max}] \times [0, t_{\max}]$ вводим равномерную сетку $\Omega = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_t$ с постоянными шагами h и τ . На этой сетке записываем разностную схему из следующего списка.

1) Схема с направленной разностью:

$$y_t + ay_{\bar{x}} = 0 \text{ (операторная форма) или } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} = 0 \text{ (индексная форма),}$$

погрешность аппроксимации схемы – $\Psi = O(\tau + h)$,

условие устойчивости (УУ) – $0 < \gamma \leq 1$, $\gamma = \frac{\tau a}{h}$ – число Куранта.

2) Схема с центральной разностью и коррекцией:

$$y_t + ay_{\bar{x}} - \frac{h^2}{2\tau} y_{\bar{x}\bar{x}} = 0 \text{ или } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} - \frac{h^2}{2\tau} \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = 0,$$

погрешность $\Psi = \begin{cases} O(\tau + h), \text{ если } \tau = O(h), \\ \Psi = O(h^2), \text{ если } \tau = h/|a|, \end{cases} \quad \text{УУ} - 0 < |\gamma| \leq 1.$

3) Схема Лакса-Вендроффа второго порядка точности:

$$y_t + ay_{\bar{x}} - \frac{\tau a^2}{2} y_{\bar{x}\bar{x}} = 0 \text{ или } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} - \frac{\tau a^2}{2} \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = 0,$$

погрешность $\Psi = O(\tau^2 + h^2)$, УУ – $0 < |\gamma| \leq 1$.

4) Схема с весами:

$$y_t + a[\sigma \hat{y}_{\bar{x}} + (1-\sigma)y_{\bar{x}}] = 0 \text{ или } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \left[\sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} + (1-\sigma) \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} \right] = 0, \text{ вес } \sigma \in [0, 1].$$

Погрешность $\Psi = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2), \text{ если } \sigma = \sigma_0 = 0.5(1 - h/(\tau a)), \\ O(\tau + h), \text{ если } \sigma \neq \sigma_0, \end{cases} \quad \text{УУ} - \sigma \geq \sigma_0.$

3. Общее пространственно одномерное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad t > 0, \quad x > 0. \quad (1')$$

Рекомендуется использовать одну из следующих схем:

1) Схема Годунова (схема с направленными разностями):

$$y_t + a^+ y_{\bar{x}} + a^- y_x = f \text{ или } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a_i^+ \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} + a_i^- \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} = f_i^j, \text{ где } a^\pm = 0.5(a \pm |a|) \text{ – функции срезки.}$$

Погрешность $\Psi = O(\tau + h)$, УУ – $0 < \gamma_m \leq 1$, $\gamma_m = \frac{\tau \cdot \max |a(x, t)|}{h}$.

2) Схема Лакса-Вендроффа:

$$y_t + ay_{\bar{x}} - \frac{\tau a^2}{2} y_{\bar{x}\bar{x}} = f \text{ или } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} - \frac{\tau a^2}{2} \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j.$$

Погрешность $\Psi = O(\tau^2 + h^2)$, УУ – $0 < \gamma_m \leq 1$.

Два алгоритма решения и распараллеливания:

- 1) Решение задачи и деление расчетной области D и сетки Ω между параллельными процессами **вдоль характеристик** (рис. 1);
- 2) Решение задачи **по слоям по времени** и деление расчетной области D и сетки Ω между параллельными процессами по пространственной координате (рис. 2).

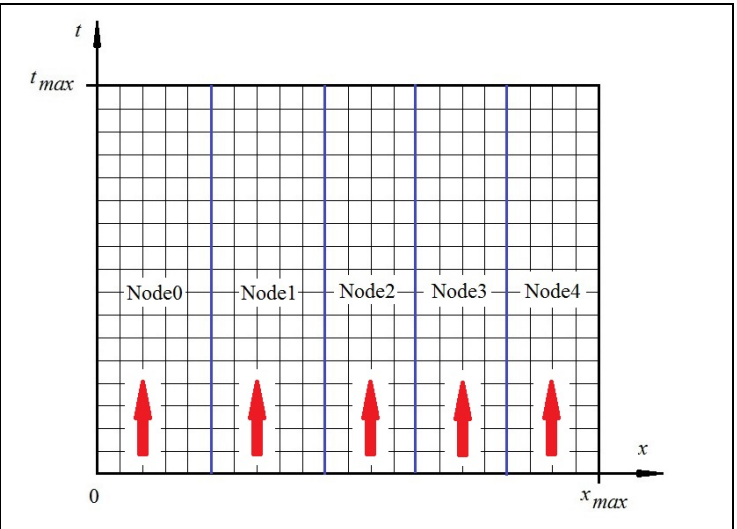
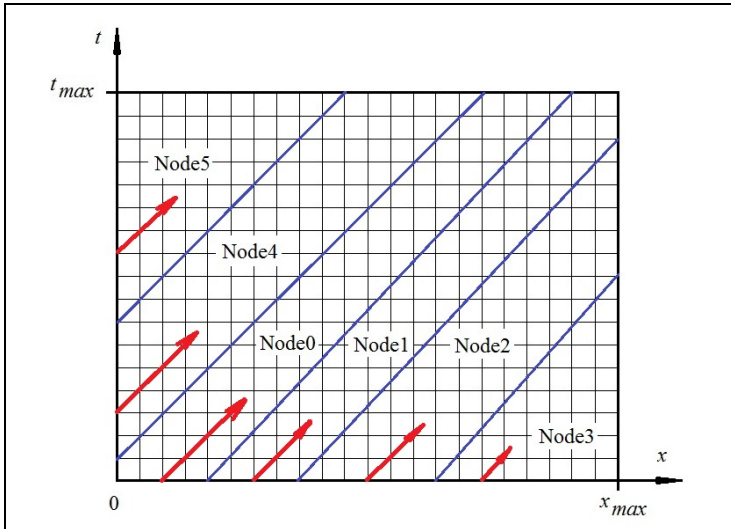


Рис. 1. Распределение узлов сетки в Алгоритме 1.

Рис. 2. Распределение узлов сетки в Алгоритме 2.

Алгоритм 1 подразумевает, что решение рассчитывается вдоль по каждой характеристики, начинающейся либо на оси x , либо на оси t . Поскольку алгоритм явный, порядок вычислений должен быть таким, чтобы для каждого нового искомого значения имелись все данные в рамках шаблона разностной схемы. Алгоритм 1 наиболее удобен для случая $a = const$ или малых изменений функции $a(x, t)$. В любом случае требуется, чтобы сетка была характеристической во всей области, а сами характеристики не пересекались. При этом криволинейность сетки допускается. Балансировка загрузки вычислителей достигается путем выполнения критерия примерного равенства количества узлов сетки, обрабатываемых каждым вычислителем.

Алгоритм 2 более универсален. Он не требует, чтобы сетка отслеживала какие-либо изменения функции $a(x, t)$. Достаточно, чтобы исходная задача была разрешима в D и погрешность аппроксимации отвечала заданной точности. При параллельных вычислениях их порядок должен быть таким, чтобы для каждого нового искомого значения также имелись все данные в рамках шаблона разностной схемы. Балансировка загрузки вычислителей также достигается путем выполнения критерия примерного равенства количества узлов сетки, обрабатываемых каждым вычислителем.

4. Многомерное линейное уравнение переноса

В многомерном случае чаще всего рассматривается следующий вариант уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{a}(\vec{x}, t), \nabla u) = f(\vec{x}, t), \quad t > 0, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

Здесь \mathbb{R}^+ – положительное полупространство пространства \mathbb{R}^m . Начальные и граничные условия аналогичны (2), (3). Количество последних соответствует размерности пространства m . Как и выше,

расчетная область выбирается ограниченной: $D = \left(\prod_{k=1}^m [0, x_{k, \max}] \right) \times [0, t_{\max}]$.

4.1. Случай постоянного вектора \vec{a} .

В этом случае задачу можно свести к поиску пучка локально-одномерных решений, распространяющихся параллельно в области D и берущих свое начало из какой либо точки начальных или граничных данных. Уравнение преобразуется в локально-одномерное:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\vec{x}(\xi), t), \quad t > 0, \quad \xi > 0; \quad \vec{x}(\xi) = \vec{x}(0) + \vec{a} \cdot \xi.$$

Здесь ξ – координата вдоль направления вектора \vec{a} , исходящего из некоторой граничной точки $M = (x_1, \dots, x_m, t)$, в которой одна из координат или время равны 0. При параллельной реализации

используем обобщение Алгоритма 1 и распределяем между вычислителями пучок лучей, исходящих из разных точек M .

4.2. Случай переменного вектора \vec{a} .

В этом случае используются разностные схемы, обобщающие схемы Годунова и Лакса-Вендроффа.

$$1) \text{ Схема Годунова: } y_t + \sum_{k=1}^m (a_k^+ y_{\bar{x}_k} + a_k^- y_{x_k}) = f.$$

Погрешность $\Psi = O(\tau + |\vec{h}|)$, $\vec{h} = (h_1, \dots, h_m)$ – вектор шагов.

$$\text{Условие устойчивости} - 0 < \gamma_m \leq 1, \gamma_m = \frac{\tau \cdot \max |a_k(\bar{x}, t)|}{|\vec{h}|}.$$

$$2) \text{ Схема Лакса-Вендроффа: } y_t + \sum_{k=1}^m \left(a_k y_{x_k} - \frac{\tau a_k^2}{2} y_{\bar{x}_k x_k} \right) = f.$$

Погрешность $\Psi = O(\tau^2 + |\vec{h}|^2)$, УУ – $0 < \gamma_m \leq 1$.

5. Пространственно-одномерное уравнение колебаний струны

В начале рассмотрим простейший вариант уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1); \quad (5)$$

Начальные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (6)$$

Граничные условия можно выбирать любые, например:

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), \quad t > 0. \quad (7)$$

Для решения задачи методом конечных разностей вводим в области $D = [0, 1] \times [0, t_{\max}]$ сетку $\Omega = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_t$ для примера с постоянными шагами h и τ , количествами узлов сетки N_x и N_t .

На Ω запишем разностную схему с весами:

$$\begin{aligned} y_{\bar{t}} = a^2 \Lambda_h (\sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y}) + f, \quad \Lambda_h y \equiv y_{\bar{x}\bar{x}}, \text{ или} \\ \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \sigma [a^2 \Lambda_h y_i^{j+1} + f_i^{j+1}] + (1-2\sigma) [a^2 \Lambda_h y_i^j + f_i^j] + \\ + \sigma [a^2 \Lambda_h y_i^{j-1} + f_i^{j-1}], \quad \Lambda_h y_i^j \equiv \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 2, \dots, N_t; \end{aligned} \quad (5h)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \text{ или } y_i^0 = u_0(x_i), \quad \frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = u_1(x_i), \quad i = 0, \dots, N_x; \quad (6h)$$

$$y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), \text{ или } y_0^j = \mu_0(t_j), \quad y_{N_x}^j = \mu_1(t_j), \quad j = 1, \dots, N_t. \quad (7h)$$

Вес $\sigma \in [0, 1]$. Чаще всего рассматриваются явная ($\sigma = 0$), неявная ($\sigma = 1$) и симметричная ($\sigma = 0.5$) схемы. Погрешность аппроксимации схемы $\Psi = O(\tau^2 + h^2)$ при любом значении σ .

Условия устойчивости:

$$1) \sigma = 0: \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad \gamma = \frac{\tau a}{h};$$

$$2) \sigma \neq 0: \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon - 1/4\gamma^2, \quad \sigma_\varepsilon = 1/4(1-\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Явная схема реализуется послойно по времени с помощью пересчета решения на новом слое через значения двух предыдущих слоев. Ее параллельная реализация основана на разбиении пространственной сетки на смежные подмножества одинаковой мощности и применении Алгоритма 2.

Остальные схемы ($\sigma \neq 0$) реализуются с помощью алгоритма прогонки, параллельная реализация основана на алгоритме параллельной прогонки (см. Лекцию 10).

6. Случай произвольного пространственного оператора

Обобщение уравнения (5) происходит при использовании произвольного пространственного оператора:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} + r_0 u \right) + r_1 \frac{\partial u}{\partial x} - qu, \quad t > 0, \quad x \in (0, 1). \quad (5')$$

Это уравнение также дополняется начальными условиями (6) и граничными условиями (7), которые могут быть трех основных типов (см. Лекцию 10):

$$\eta_m u(x_m) + \theta_m \frac{\partial u}{\partial x}(x_m) = \mu_m, \quad \eta_m^2 + \theta_m^2 \neq 0, \quad m = 0, 1, \quad (7_1)$$

$$u(0) = u(1), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1), \quad (7_2)$$

$$\Phi_0(u) = c_0, \quad \Phi_1(u) = c_1. \quad (7_3)$$

Для решения задачи методом конечных разностей используется схема с весами, аналогичная (5_h).

Погрешность аппроксимации $\Psi = O(\tau^2 + h^2)$ при любом значении $\sigma \in [0, 1]$.

Условия устойчивости можно получить, если привести схему (5_h) к виду: $B y_i + \tau^2 R y_{\bar{i}} + A y = f$.

Тогда, если будут выполнены условия: $A = A^* > 0, R = R^* > 0, B \geq 0, R > A/4$, схема будет устойчива.

В упрощенном виде эти условия приведут к условию Куранта: $0 < \frac{\tau a}{h} \leq 1$ с некоторой константой a .

Параллельная реализация схемы аналогична указанной в п. 5.

7. Многомерное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad Lu \equiv \sum_{\alpha=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^m k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + r_{0,\alpha} u \right) + r_{1,\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right] - qu, \quad t > 0, \quad \bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^m. \quad (5'')$$

Начальные условия аналогичны (6). Граничные условия аналогичны (7₁), (7₂), (7₃).

Для решения многомерной задачи можем использовать:

1) схему с весами и прямые или итерационные методы для расчета решения на каждом новом слое по времени (однако чаще всего здесь используют явную схему по времени, так как условие устойчивости

будет типа условия Куранта: $0 < \frac{\tau a}{|\bar{h}|} \leq 1$);

2) схемы расщепления, например, локально-одномерные схемы и комбинацию прогонок для расчета решения на каждом новом слое по времени.

По сути этот случай аналогичен по методике решению многомерного уравнения теплопроводности. Поэтому методики распараллеливания те же (см. Лекцию 11).