Лекция 10. Решение пространственно одномерных краевых задач.

1. Постановки краевых задач

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}+r_0u\right)+r_1\frac{du}{dx}-qu=-f, \quad 0<x<1. \tag{1}$$

Линейный случай: $k=k(x)\ge k_0>0,\ r_i=r_i(x),\ q=q(x),\ f=f(x)$ – кусочно-непрерывны на (0,1).

Обобщенная краевая задача для уравнения (1):

$$\eta_m u(x_m)+\theta_m u'(x_m)=\mu_m,\ \eta_m^2+\theta_m^2\ne 0,\ m=0,\ 1, \tag{2_1}$$

$$u(0)=u(1),\ u'(0)=u'(1), \tag{2_2}$$

$$\Phi_0(u)=c_0,\ \Phi_1(u)=c_1. \tag{2_3}$$

Здесь $x_0\equiv 0$, $x_1\equiv 1$, η_m, θ_m, μ_m, c_m – константы ($m=0,1$). (2_1) включают условия либо 1-го, либо 2-го, либо 3-го рода, а также могут быть смешанными. (2_2) соответствуют периодической задаче (коэффициенты в (1) должны быть периодичны). В (2_3): $\Phi_m(u)$ – линейные функционалы u:

$$\Phi_m(u)=\int_0^1 u(x')\rho_m(x')dx' \ \ (m=0,1).$$

Квазилинейный случай:

$k=k(x,u)\ge k_0>0,\ r_i=r_i(x,u),\ q=q(x,u),\ f=f(x,u)$, $\eta_m=\eta_m(u)$, $\theta_m=\theta_m(u)$, $\mu_m=\mu_m(u)$ – нелинейные функции u, а $\Phi_m(u)$ – нелинейные функционалы, например, $\int_0^1 |u(x')|^2\rho_0(x')dx'$, $\int_0^1 |u'(x')|^2\rho_1(x')dx'$ и др..

Нестационарный случай:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}+r_0u\right)+r_1\frac{\partial u}{\partial x}-qu+f,\ 0<x<1,\ t>0, \tag{3}$$

$$u(x,0)=g(x), \tag{4}$$

\+ условия вида (2). В линейном случае коэффициенты зависят от x, t, в квазилинейном – от x, t, u.

Во всех случаях предполагаем существование единственного решения.

Четыре модели:

1) $r_0=0,\ r_1=0$ – уравнение диффузии;
2) $r_0=0,\ r_1\ne 0$ – уравнение конвекции-диффузии;
3) $r_0\ne 0,\ r_1=0$ – уравнение внутренней конвекции-диффузии;
4) $r_0\ne 0,\ r_1\ne 0$ – обобщенное уравнение конвекции-диффузии.

Это разделение обусловлено как свойствами решения, так и выбором численного метода.

2. Базовый численный алгоритм

Для численного решения используем разновидность сеточных методов – метод конечных разностей. Способ построения разностных схем – интегро-интерполяционный метод.

Сетки: $\bar{\omega}_x=\{x=x_i,\ i=0,...,N_x\}$, $\bar{\omega}_t=\{t=t_j=\tau\cdot j,\ j=0,...,N_t,\ \tau=L_t/N_t\}$.

Преобразование: $Lu=\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{r_1}{k}w-\tilde{q}u, \quad w=k\dfrac{du}{dx}+r_0u=\dfrac{k}{e}\dfrac{d}{dx}(eu), \quad e=\exp\left\{\int_0^x\dfrac{r_0}{k}dx'\right\}, \quad \tilde{q}=q+\dfrac{r_0r_1}{k}.$

Схема в стационарном случае в операторном виде: $\Lambda_h y_h=-\varphi_h$. (1_h)

Здесь y_h – сеточный аналог u, φ_h – сеточный аналог f, а Λ_h – разностный оператор, сеточный аналог L.

Введем обозначения:

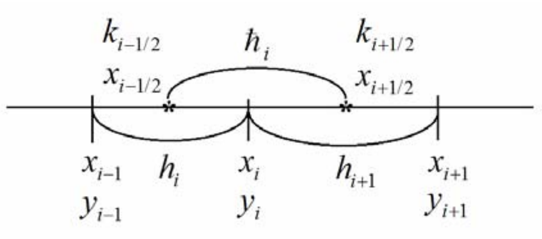
$x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i-1/2},x_{i+1/2}$ – узлы сетки,

h_i, h_{i+1}, $\hbar_i=0.5\cdot(h_i+h_{i+1})$ – шаги сетки,

$y_i\approx u(x_i)$ – приближенные значения искомой функции,

$e_i,\varphi_i,\tilde{Q}_i$ – значения (аппроксимации) заданных сеточных функций в целых узлах сетки,

$\tilde{k}_{i\pm 1/2}$ – значения (аппроксимации) заданных сеточных функций в полуцелых узлах.



$\hbar_0=0.5\cdot h_1, \quad \hbar_{N_x}=0.5\cdot h_{N_x}.$

Тогда схема (1_h) в индексной форме будет иметь вид:

$$\Lambda_h y_i \equiv \frac{1}{\hbar_i}\left(\tilde{k}_{i+1/2}\frac{y_{i+1}e_{i+1}-y_i e_i}{e_{i+1/2}h_{i+1}} - \tilde{k}_{i-1/2}\frac{y_i e_i - y_{i-1}e_{i-1}}{e_{i-1/2}h_i}\right) - \tilde{Q}_i y_i = -\varphi_i, \quad 0 < i < N_x. \qquad (1_i)$$

Здесь $\tilde{k}_{i\pm1/2} = k_{i\pm1/2}\cdot\left(\chi_i \pm \hbar_i \tilde{r}_{1,i}^{\pm}\right)$, $k_{i\pm1/2}$ – точные значения или аппроксимации $\left[\frac{1}{h_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx'}{k(x')}\right]^{-1}$ и $\left[\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx'}{k(x')}\right]^{-1}$,

e_i – точные значения или аппроксимации $\exp\left\{\int\limits_0^{x_i}\frac{r_0(x')}{k(x')}dx'\right\}$, $\tilde{Q}_i$ – точные значения или аппроксимации $\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\tilde{q}(x)dx$, φ_i – точные или приближенные значения $\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx$, $\chi_i = \frac{1}{1+R_i}$, $R_i = 0.5(\tilde{r}_{1,i}^{+}h_{i+1} - \tilde{r}_{1,i}^{-}h_i)$,

$\tilde{r}_{1,i}^{\pm} = 0.5\frac{r_{1,i}\pm|r_{1,i}|}{k_i}$, $q_i = q(x_i)$, $k_i = k(x_i)$, $r_{m,i} = r_m(x_i)$ $(m = 0,\ 1)$.

Если во всех членах используются точные значения интегралов, получаем ***точную схему***, иначе ***приближенную***. В последнем случае используем следующие ***аппроксимации коэффициентов***:

$$e_i = \exp\left\{\int\limits_0^{x_i}\frac{r_0(x)}{k(x)}dx\right\} \approx \exp\left\{\sum_{j=0}^{i}\frac{r_0(x_j)}{k(x_j)}\hbar_j\right\}, \quad \tilde{Q}_i = \frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\tilde{q}(x)dx \approx \tilde{q}(x_i), \quad \varphi_i = \frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x)dx \approx f(x_i),$$

$$k_{i+1/2} = \left[\frac{1}{h_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1} \approx k(x_{i+1/2}) \vee \frac{1}{2}\left(k(x_i)+k(x_{i+1})\right) \vee \frac{2k(x_i)k(x_{i+1})}{k(x_i)+k(x_{i+1})}.$$

Условия границе:

Для первой краевой задачи они очевидны: $y_0 = \mu_0$, $y_{N_x} = \mu_1$. $\qquad (2_{1h})$

Для краевых задач 2-го и 3-го рода, в граничных узлах записываются уравнения (1_h) с учетом потоков:

$$\frac{1}{\hbar_0}\left(\tilde{k}_{1/2}\frac{y_1 e_1 - y_0 e_0}{e_{1/2}h_1} - w_0\right) - \tilde{q}_0 y_0 = -\varphi_0, \quad \frac{1}{\hbar_{N_x}}\left(w_{N_x} - \tilde{k}_{N_x-1/2}\frac{y_{N_x}e_{N_x} - y_{N_x-1}e_{N_x-1}}{e_{N_x-1/2}h_{N_x}}\right) - \tilde{q}_{N_x}y_{N_x} = -\varphi_{N_x} \qquad (2_{2h})$$

Для 2-ой краевой задачи (условия Неймана $u'(0) = u'(1) = 0$) потоки w_0, w_{N_x} равны 0.

Для 3-ей краевой задачи $w_0 = \tilde{\eta}_0\left(y_0 - \mu_0\right)$, $w_{N_x} = -\tilde{\eta}_1\left(y_{N_x} - \mu_1\right)$.

Для периодической задачи добавляется одно граничное уравнение (1_i), например, в узле $i = N_x$ и учитываются равенства $y_0 = y_{N_x}$, $y_{N_x+1} = y_1$. При этом $\hbar_{N_x} = 0.5\cdot(h_{N_x} + h_1)$.

В случае условий (2_3) используются сеточные аналоги интегралов (формула трапеций):

$$\sum_{i=0}^{N_x} y_i \rho_{m,i}\hbar_i = c_m \quad (m = 0,\ 1). \qquad (2_{3h})$$

Анализ схем. Схема (1_h)-(2_h) в случае

$r_0 = 0,\ r_1 = 0$ – ***однородная схема Самарского***;

$r_0 = 0,\ r_1 \neq 0$ – ***регуляризованная однородная схема Самарского***;

$r_0 \neq 0,\ r_1 = 0$ – ***схема Кареткиной-Костомарова***;

$r_0 \neq 0,\ r_1 \neq 0$ – ***обобщение*** двух предыдущих схем.

Квазилинейный случай. Схема (1_h)-(2_h) справедлива. Однако коэффициенты зависят от y_h. Существенный момент – локальный или нелокальный тип нелинейности коэффициентов.

Нестационарный случай.

Схема с весами: $\frac{\hat{y}_h - y_h}{\tau} = \sigma\hat{\Lambda}_h\hat{y}_h + (1-\sigma)\Lambda_h y_h + \sigma\hat{f}_h + (1-\sigma)f_h,$ $\qquad (3_h)$

$$y_h\big|_{t=0} = g_h, \qquad (4_h)$$

где $\hat{y}_h$ и y_h относятся к верхнему и нижнему слоям по времени ($t+\tau$ и t). Вес σ = 0, 1 и 0.5 – явная, неявная и симметричная схемы. Коэффициенты в обеих схемах выбирают так, чтобы $\Psi = O(\hbar^2)$ и

$O(\hbar^2+\tau)$ или $O(\hbar^2+\tau^2)$. Для этого коэффициенты уравнений и граничных условий, содержащие интегралы, вычисляются точно или аппроксимируются со вторым порядком.

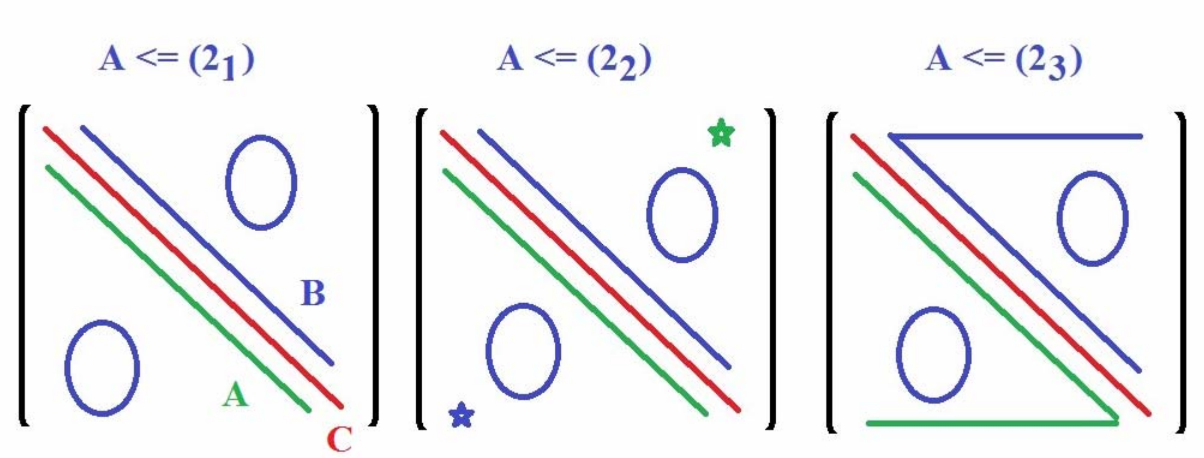
3. Система алгебраических уравнений и скалярные алгоритмы прогонки

Разностная схема (1_h), (2_h) или (3_h), (4_h), (2_h) эквивалентна некоторой алгебраической задаче вида:

$$AY = F, \quad Y = \left(y_0, y_1, ..., y_{N_x}\right). \tag{*}$$

Эта задача может быть линейной или нелинейной ($A = A(Y), F = F(Y)$). Рассмотрим первый случай. Алгебраическая задача возникает после преобразования разностной схемы к специальному виду. Она дает разностное решение (стационарное, либо относящееся к очередному слою по времени).

Преобразование схемы к виду (*) состоит в умножении уравнений (1_i) на величину $\left(-\hbar_i h_m\right)$, h_m – минимальный шаг среди всех h_i. В результате матрица имеет свойства: $A = A^* \ge 0$. Проблема нулевого собственного значения в задаче Неймана ($u'(0) = u'(1) = 0$) решается заданием $y_{N_x} = 1$ или переходом к матрице $\tilde{A} = A + \delta I$, где I – единичная матрица, $\delta \approx N_x^{-1}$ – параметр. Обсудим далее портрет матрицы:



Для удобства решения система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, или близкая к ней, записывается в ***каноническом*** виде:

$$-A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i, \quad 1 \le i \le N-1. \tag{5}$$

На границе в случае (2_1) получаем: $C_0 y_0 - B_0 y_1 = F_0$, $C_N y_N - A_N y_{N-1} = F_N$. ($6_1$)

В случае (2_2) уравнения (5) имеют место для всех $i = 1, \; ..., N-2$, а в узлах $i = 0$ и $i = N-1$ имеем

$$-A_0 y_{N-1} + C_0 y_0 - B_0 y_1 = F_0, \; -A_{N-1} y_{N-2} + C_{N-1} y_{N-1} - B_{N-1} y_0 = F_{N-1}. \tag{6_2}$$

В случае (2_3) получаем:

$$C_0 y_0 + \sum_{i=1}^{N} B_{0,i} y_i = F_0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} A_{N,i} y_i + C_N y_N = F_N. \tag{6_3}$$

Замечание: в последнем случае можно оставить условия в виде (2_{3h}).

Свойства коэффициентов:

$$A_i, B_i \ge 0, \; C_i > 0, \; i = 0, ..., N, \tag{7_1}$$

либо $\quad C_i = A_i + B_i + D_i, \; D_i > 0, \; i = 0, ..., N,$ (7_2)

либо $\quad C_i = A_{i+1} + B_{i-1} + D_i, \; D_i > 0, \; i = 1, ..., N-1.$ (7_3)

Свойство (7_3) вместо (7_2) возникает в случае немонотонного оператора ($r_0 \ne 0$) во внутренних узлах сетки. На границе в любом случае должны быть выполнены условия (7_2).

Если задача нелокальная, должны выполняться ***условия ее разрешимости***.

Варианты алгоритма прогонки (компактный метод Гаусса для трехдиагональной матрицы)**.**

Правая прогонка:

$$\alpha_0 = \frac{B_0}{C_0}, \quad \beta_0 = \frac{F_0}{C_0}, \quad \alpha_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F_i + A_i \beta_{i-1}}{C_i - A_i \alpha_{i-1}}, \quad i = 1, ..., N;$$

$$y_N = \beta_N, \quad y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, \quad i = N-1, ..., 0.$$

Левая прогонка:

$$\alpha_N=\frac{A_N}{C_N},\quad \beta_N=\frac{F_N}{C_N},\quad \alpha_i=\frac{A_i}{C_i-B_i\alpha_{i+1}},\quad \beta_i=\frac{F_i+B_i\beta_{i+1}}{C_i-B_i\alpha_{i+1}},\quad i=N-1,...,0;$$

$$y_0=\beta_0,\quad y_i=\alpha_i y_{i-1}+\beta_i,\quad i=1,...,N.$$

Встречная прогонка:

$$\alpha_0=\frac{B_0}{C_0},\quad \beta_0=\frac{F_0}{C_0},\quad \alpha_i=\frac{B_i}{C_i-A_i\alpha_{i-1}},\quad \beta_i=\frac{F_i+A_i\beta_{i-1}}{C_i-A_i\alpha_{i-1}},\quad i=1,...,M;$$

$$\alpha_N=\frac{A_N}{C_N},\quad \beta_N=\frac{F_N}{C_N},\quad \alpha_i=\frac{A_i}{C_i-B_i\alpha_{i+1}},\quad \beta_i=\frac{F_i+B_i\beta_{i+1}}{C_i-B_i\alpha_{i+1}},\quad i=N-1,...,M+1;$$

$$y_M=\frac{\beta_M+\alpha_M\beta_{M+1}}{1-\alpha_M\alpha_{M+1}},\quad y_i=\alpha_i y_{i+1}+\beta_i,\quad i=M-1,...,0,\quad y_i=\alpha_i y_{i-1}+\beta_i,\quad i=M+1,...,N.$$

Правая циклическая прогонка:

$$\alpha_0=\frac{B_0}{C_0},\quad \beta_0=\frac{F_0}{C_0},\quad \gamma_0=\frac{A_0}{C_0},\quad \alpha_i=\frac{B_i}{C_i-A_i\alpha_{i-1}},\quad \beta_i=\frac{F_i+A_i\beta_{i-1}}{C_i-A_i\alpha_{i-1}},\quad \gamma_i=\frac{A_i\gamma_{i-1}}{C_i-A_i\alpha_{i-1}},\quad i=1,...,N-1;$$

$$p_{N-1}=\beta_{N-1},\quad q_{N-1}=\alpha_{N-1}+\gamma_{N-1},\quad p_i=\alpha_i p_{i+1}+\beta_i,\quad q_i=\alpha_i q_{i+1}+\gamma_i,\quad i=N-2,...,0;$$

$$y_{N-1}=\frac{\beta_{N-1}+\alpha_{N-1}p_0}{1-\alpha_{N-1}q_0-\gamma_{N-1}},\quad y_i=p_i+y_{N-1}q_i,\quad i=N-2,...,0,\quad y_N=y_0.$$

Интегральная прогонка:

Представим решение в виде: $y_i=y_i^{(I)}+y_0 y_i^{(III)}+y_N y_i^{(II)},\quad i=0,...,N$.

Здесь $y_i^{(I)},y_i^{(II)},y_i^{(III)}$ – базисные функции, решения следующих краевых задач:

$$(I):\quad -A_i y_{i-1}+C_i y_i-B_i y_{i+1}=F_i,\ 1\le i\le N-1,\quad y_0=0,\quad y_N=0;$$

$$(II):\quad -A_i y_{i-1}+C_i y_i-B_i y_{i+1}=0,\ 1\le i\le N-1,\quad y_0=0,\quad y_N=1;$$

$$(III):\quad -A_i y_{i-1}+C_i y_i-B_i y_{i+1}=0,\ 1\le i\le N-1,\quad y_0=1,\quad y_N=0.$$

Из условий (2_{3h}) найдем по правилам Крамера граничные значения y_0,y_N :

$$\alpha_{11}=\sum_{i=0}^{N} y_i^{(I)}\rho_{0,i}\hbar_i,\quad \alpha_{12}=\sum_{i=0}^{N} y_i^{(II)}\rho_{0,i}\hbar_i,\quad \alpha_{13}=\sum_{i=0}^{N} y_i^{(III)}\rho_{0,i}\hbar_i,$$

$$\alpha_{21}=\sum_{i=0}^{N} y_i^{(I)}\rho_{1,i}\hbar_i,\quad \alpha_{22}=\sum_{i=0}^{N} y_i^{(II)}\rho_{1,i}\hbar_i,\quad \alpha_{23}=\sum_{i=0}^{N} y_i^{(III)}\rho_{1,i}\hbar_i,$$

$$y_0=\frac{\alpha_{12}(c_1-\alpha_{21})-\alpha_{22}(c_0-\alpha_{11})}{\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{22}\alpha_{13}},\quad y_N=\frac{\alpha_{23}(c_0-\alpha_{11})-\alpha_{13}(c_1-\alpha_{21})}{\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{22}\alpha_{13}}.$$

Немонотонная прогонка

$$(!)\quad C_i=A_{i+1}+B_{i-1}+D_i,\quad i=1,...,N-1;\quad A_i:\ \ i=1,...,N;\quad B_i:\ \ i=0,...,N-1;$$

$$(!)\quad C_0y_0-\tilde{B}_0y_1\equiv C_0y_0-A_0y_1=F_0,\quad C_Ny_N-\tilde{A}_Ny_{N-1}\equiv C_Ny_N-B_Ny_{N-1}=F_N.$$

Правая немонотонная прогонка (без перемены знака, r_0<=0):

$$\alpha_0=\frac{A_0A_1}{B_0C_0},\quad \beta_0=\frac{F_0}{C_0},\quad \alpha_i=\frac{A_{i+1}}{C_i-B_{i-1}\alpha_{i-1}},\quad \beta_i=\frac{F_i+A_i\beta_{i-1}}{C_i-B_{i-1}\alpha_{i-1}},\quad i=1,...,N-1;$$

$$y_N=\frac{F_N+B_N\beta_{N-1}}{C_N-\left(B_N/A_N\right)B_{N-1}\alpha_{N-1}},\quad y_i=\frac{B_i}{A_{i+1}}\alpha_i y_{i+1}+\beta_i,\quad i=N-1,...,0.$$

Левая немонотонная прогонка (без перемены знака, r_0>=0):

$$\alpha_N=\frac{B_{N-1}B_N}{A_NC_N},\quad \beta_N=\frac{F_N}{C_N},\quad \alpha_i=\frac{B_{i-1}}{C_i-A_{i+1}\alpha_{i+1}},\quad \beta_i=\frac{F_i+B_i\beta_{i+1}}{C_i-A_{i+1}\alpha_{i+1}},\quad i=N-1,...,1;$$

$$y_0=\frac{F_0+A_0\beta_1}{C_0-\left(A_0/B_0\right)A_1\alpha_1},\quad y_i=\frac{A_i}{B_{i-1}}\alpha_i y_{i-1}+\beta_i,\quad i=1,...,N.$$

Встречная правая немонотонная прогонка (одна перемена знака, слева r_0<=0, справа r_0>=0):

$$0 \le \frac{B_i}{A_{i+1}} \le 1, \quad i = 0,\dots,M-1; \quad 0 \le \frac{A_i}{B_{i-1}} \le 1, \quad i = M+1,\dots,N;$$

$$\alpha_0 = \frac{A_0 A_1}{B_0 C_0}, \quad \beta_0 = \frac{F_0}{C_0}, \quad \alpha_i = \frac{A_{i+1}}{C_i - B_{i-1}\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{F_i + A_i\beta_{i-1}}{C_i - B_{i-1}\alpha_{i-1}}, \quad i = 1,\dots,M-1;$$

$$\alpha_N = \frac{B_{N-1} B_N}{A_N C_N}, \quad \beta_N = \frac{F_N}{C_N}, \quad \alpha_i = \frac{B_{i-1}}{C_i - A_{i+1}\alpha_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{F_i + B_i\beta_{i+1}}{C_i - A_{i+1}\alpha_{i+1}}, \quad i = N-1,\dots,M+1;$$

$$y_M = \frac{F_M + A_M\beta_{M-1} + B_M\beta_{M+1}}{C_M - B_{M-1}\alpha_{M-1} - A_{M+1}\alpha_{M+1}} = \frac{F_M + A_M\beta_{M-1} + B_M\beta_{M+1}}{B_{M-1}\left(1-\alpha_{M-1}\right) + A_{M+1}\left(1-\alpha_{M+1}\right) + D_M},$$

$$y_i = \frac{B_i}{A_{i+1}}\alpha_i y_{i+1} + \beta_i, \quad i = M-1,\dots,0, \quad y_i = \frac{A_i}{B_{i-1}}\alpha_i y_{i-1} + \beta_i, \quad i = M+1,\dots,N.$$

Встречная левая немонотонная прогонка (одна перемена знака, слева r_0>=0, справа r_0<=0):

$$0 \le \frac{A_i}{B_{i-1}} \le 1, \quad i = 1,\dots,M; \quad 0 \le \frac{B_i}{A_{i+1}} \le 1, \quad i = M,\dots,N-1;$$

$$y_i = y_i^{(I)} + y_M y_i^{(II)}, \quad i = 0,\dots,M;$$

$$(I): \quad C_0 y_0^{(I)} - \tilde{B}_0 y_1^{(I)} = F_0, \quad -A_i y_{i-1}^{(I)} + C_i y_i^{(I)} - B_i y_{i+1}^{(I)} = F_i, \quad 1 \le i \le M-1, \quad y_M^{(I)} = 0;$$

$$(II): \quad C_0 y_0^{(II)} - \tilde{B}_0 y_1^{(II)} = 0, \quad -A_i y_{i-1}^{(II)} + C_i y_i^{(II)} - B_i y_{i+1}^{(II)} = 0_i, \quad 1 \le i \le M-1, \quad y_M^{(II)} = 1;$$

$$y_i = y_i^{(I)} + y_M y_i^{(III)}, \quad i = M,\dots,N;$$

$$(I): \quad y_M^{(I)} = 0, \quad -A_i y_{i-1}^{(I)} + C_i y_i^{(I)} - B_i y_{i+1}^{(I)} = F_i, \quad M+1 \le i \le N-1, \quad C_N y_N^{(I)} - \tilde{A}_N y_{N-1}^{(I)} = F_N;$$

$$(III): \quad y_M^{(III)} = 1, \quad -A_i y_{i-1}^{(III)} + C_i y_i^{(III)} - B_i y_{i+1}^{(III)} = 0, \quad M+1 \le i \le N-1, \quad C_N y_N^{(III)} - \tilde{A}_N y_{N-1}^{(III)} = 0.$$

Условие сопряжения:

$$-A_M\left(y_{M-1}^{(I)} + y_M y_{M-1}^{(II)}\right) + C_M y_M - B_M\left(y_{M+1}^{(I)} + y_M y_{M+1}^{(III)}\right) = F_M.$$

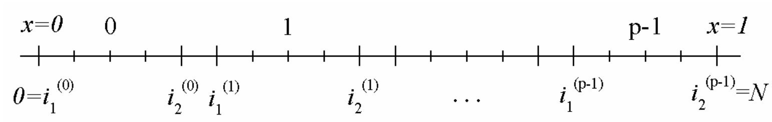
Решение:

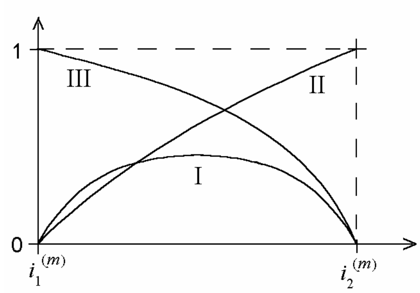
$$y_M = \frac{F_M + A_M y_{M-1}^{(I)} + B_M y_{M+1}^{(I)}}{\left(C_M - A_M y_{M-1}^{(II)} - B_M y_{M+1}^{(III)}\right)} = \frac{F_M + A_M y_{M-1}^{(I)} + B_M y_{M+1}^{(I)}}{\left(B_{M-1}\left(1 - \frac{A_M}{B_{M-1}} y_{M-1}^{(II)}\right) + A_{M+1}\left(1 - \frac{B_M}{A_{M+1}} y_{M+1}^{(III)}\right) + D_M\right)}.$$

4. Параллельный алгоритм решения

Алгоритм решения – метод прогонки (вариант метода Гаусса). Алгоритм решения на МВС – метод конвеерной прогонки либо метод параллельной прогонки. ***Метод конвеерной прогонки*** можно использовать при решении векторной задачи. В данном случае он не эффективен.

Параллельный алгоритм на примере системы (5)-(6_1) для МВС с p процессорами. Введем равномерное линейное разбиение множества номеров узлов сетки $\Omega = \{0,1,\dots,N\}$ на связные подмножества $\Omega_m = \{i_1^{(m)},\dots,i_2^{(m)}\}$ ($m = 0,\dots,p-1$), соответствующие разбиению вектора неизвестных по процессорам:





В результате такого разбиения процессор с номером m будет обрабатывать $(i_2^{(m)} - i_1^{(m)} + 1)$ точек. Представим решение на каждом внутреннем ($0 < m < p-1$) процессоре в виде:

$$y_i \equiv y_i^{(m)} = y_i^{(I,m)} + y_{i_1^{(m)}} y_i^{(III,m)} + y_{i_2^{(m)}} y_i^{(II,m)}, \qquad (8_1)$$

где $y_i^{(\alpha,m)}$ ($\alpha = I, II, III$) определены на Ω_m и играют роль базиса, а значения функции на границе Ω_m – $y_{i_1^{(m)}}$ и $y_{i_2^{(m)}}$ – пока не известны. Во внутренних узлах Ω_m функция $y_i^{(I,m)}$ находится из уравнений (5), а функции $y_i^{(II,m)}$, $y_i^{(III,m)}$ из уравнений (5) с нулевой правой частью. Граничные условия для $y_i^{(\alpha,m)}$:

$$y_{i_1^{(m)}}^{(I,m)} = 0,\ y_{i_2^{(m)}}^{(I,m)} = 0;\ y_{i_1^{(m)}}^{(II,m)} = 0,\ y_{i_2^{(m)}}^{(II,m)} = 1;\ y_{i_1^{(m)}}^{(III,m)} = 1,\ y_{i_2^{(m)}}^{(I,m)} = 0. \qquad (9_1)$$

На нулевом и последнем процессорах:

$$y_i^{(0)} = y_i^{(I,0)} + y_{i_2^{(0)}} y_i^{(II,0)}, \quad y_i^{(p-1)} = y_i^{(I,p-1)} + y_{i_1^{(p-1)}} y_i^{(III,p-1)}. \qquad (8_2)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &C_0 y_0^{(I,0)} - B_0 y_1^{(I,0)} = F_0,\ y_{i_2^{(0)}}^{(I,0)} = 0; \quad y_{i_1^{(p-1)}}^{(I,p-1)} = 0,\ C_N y_N^{(I,p-1)} - A_N y_{N-1}^{(I,p-1)} = F_N; \\ &C_0 y_0^{(II,0)} - B_0 y_1^{(II,0)} = 0,\ y_{i_2^{(0)}}^{(II,0)} = 1. \quad y_{i_1^{(p-1)}}^{(III,p-1)} = 1,\ C_N y_N^{(III,p-1)} - A_N y_{N-1}^{(III,p-1)} = 0. \end{aligned} \qquad (9_2)$$

Нахождение значений в граничных узлах подобластей (***короткая задача, система***):

$$-A_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1} + C_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}} - B_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}+1} = F_{i_2^{(m)}}, \quad -A_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}-1} + C_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}} - B_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1} = F_{i_1^{(m+1)}}. \qquad (10)$$

Если учесть в этих уравнениях очевидные связи:

$$y_{i_2^{(m)}-1} = y_{i_2^{(m)}-1}^{(I,m)} + y_{i_1^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(III,m)} + y_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(II,m)},\ y_{i_2^{(m)}+1} = y_{i_1^{(m+1)}},$$

$$y_{i_1^{(m+1)}-1} = y_{i_2^{(m)}},\ y_{i_1^{(m+1)}+1} = y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(I,m)} + y_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(III,m)} + y_{i_2^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(II,m)},$$

то получим:

$$-\tilde{A}_{i_2^{(m)}} y_{i_1^{(m)}} + \tilde{C}_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}} - \tilde{B}_{i_2^{(m)}} y_{i_1^{(m+1)}} = \tilde{F}_{i_2^{(m)}}, \quad -\tilde{A}_{i_1^{(m+1)}} y_{i_2^{(m)}} + \tilde{C}_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}} - \tilde{B}_{i_1^{(m+1)}} y_{i_2^{(m+1)}} = \tilde{F}_{i_1^{(m+1)}}, \qquad (11)$$

с коэффициентами

$$\tilde{A}_{i_2^{(m)}} = A_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(III,m)}, \quad \tilde{B}_{i_2^{(m)}} = B_{i_2^{(m)}}, \quad \tilde{C}_{i_2^{(m)}} = C_{i_2^{(m)}} - A_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(II,m)}, \quad \tilde{F}_{i_2^{(m)}} = F_{i_2^{(m)}} + A_{i_2^{(m)}} y_{i_2^{(m)}-1}^{(I,m)},$$

$$\tilde{A}_{i_1^{(m+1)}} = A_{i_1^{(m+1)}}, \quad \tilde{B}_{i_1^{(m+1)}} = B_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(II,m+1)}, \quad \tilde{C}_{i_1^{(m+1)}} = C_{i_1^{(m+1)}} - B_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(III,m+1)},\ \tilde{F}_{i_1^{(m+1)}} = F_{i_1^{(m+1)}} + B_{i_1^{(m+1)}} y_{i_1^{(m+1)}+1}^{(I,m+1)}.$$

В итоге получим следующую систему из $2p-2$ уравнений для $2p-2$ неизвестных

$$-\tilde{A}_i y_{i-1} + \tilde{C}_i y_i - \tilde{B}_i y_{i+1} = \tilde{F}_i,\ i \in \tilde{\Omega} = \{i_2^{(0)}, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_1^{(p-1)}\}, \qquad (12)$$

где под индексом $i \pm 1$ понимается переход к соответствующему соседнему элементу из множества $\tilde{\Omega}$. Аналогично, в граничных узлах $i_2^{(0)}$ и $i_1^{(p-1)}$ уравнения (12) принимают вид (6_1).

Свойства базиса:

$$\left\| y^{(I,m)} \right\|_C \le \left\| D^{-1} F \right\|_C,\ 0 \le y^{(II,m)} \le 1,\ 0 \le y^{(III,m)} \le 1,\ m = 0,\ldots,p-1, \quad 0 \le y_i^{(II,m)} + y_i^{(III,m)} \le 1,\ \text{для всех } i,m \qquad (13)$$

Эти свойства обеспечивают устойчивость вычислений по формулам (8).

В силу свойств базиса (13) коэффициенты ***короткой системы*** уравнений также удовлетворяют условиям принципа максимума => решение системы (12) ***существует и единственно***. Определив его методом обычной прогонки, с помощью формул (8) можно вычислить решение исходной задачи.

Последовательность действий параллельного алгоритма прогонки.

1. Каждый вычислитель с помощью алгоритма последовательной прогонки решает три (или две) задачи для нахождения базисных функций $y^{(\alpha,\, m)}$.
2. Каждый вычислитель находит свою часть коэффициентов ***короткой системы*** относительно неизвестных $y_{i_1}^{(m)}$, $y_{i_2}^{(m)}$ ($m = 0,\ldots,p-1$).
3. Все вычислители осуществляют ***коллективный обмен*** коэффициентами ***короткой системы***.
4. Каждый вычислитель решает короткую систему и выбирает нужные ему значения $y_{i_1}^{(m)}$ и $y_{i_2}^{(m)}$.
5. Каждый вычислитель использует значения $y_{i_1}^{(m)}$ и $y_{i_2}^{(m)}$ для вычисления своей части решения по формулам (8).

Эффективность алгоритма.

Каждый ПА оценивается по ускорению S_p и эффективности E_p, которые определяются по формулам $S_p = \dfrac{t_1}{t_p}$, $E_p = \dfrac{S_p}{p} \cdot 100\%$, где t_1 - время решения исходной задачи на одном процессоре, t_p - время решения исходной задачи по параллельному алгоритму на p процессорах. В теоретических исследованиях не принимают во внимание накладные расходы, связанные с временем обменов, поскольку последнее является неконтролируемым фактором и сильно зависит от конкретной МВС. Поэтому времена t_1 и t_p заменяют на оценки числа арифметических операций Q_1 и Q_p. Последние оценивают по количеству элементарных объектов вычислений, например, как в нашем случае, по числу узлов расчетной сетки N.

Алгоритм ***скалярной прогонки***: $Q_1 = C_1 N$ обобщенных арифметических действий. Алгоритм ***параллельной прогонки***: $Q_p \approx 3C_2 N / p + 2C_1 p$ действий. На каждом процессоре, кроме нулевого, решаются три задачи размерности N / p, а нулевой решает еще и короткую задачу размерности $2p - 2$. Константы C_1, C_2 не зависят от N и p и близки по величине ($C_2 / C_1 \sim 1.2$). Теперь оценим величину ускорения и эффективность параллельного алгоритма:

$$S_p = \frac{p}{3C_2 / C_1 + 2p^2 / N}, \quad E_p = \frac{1}{3C_2 / C_1 + 2p^2 / N} \cdot 100\%.$$

Анализ: при $p << \sqrt{N}$ ускорение $S_p \approx p/3$, а эффективность $E_p \approx 33\%$. Эти оценки можно уточнить, если рассмотреть структуру вычислений и учесть соотношения между различными видами арифметических операций. Однако полученная асимптотика не сильно изменится.

Эффективность решения краевой задачи в целом оценивается иначе. В скалярном случае $Q_1 = C_0 N + C_1 N$, где первое слагаемое связано с вычислением коэффициентов задачи. В случае нескольких процессоров получим $Q_p \approx C_0 N / p + 3C_2 N / p + 2C_1 p$. Поэтому

$$S_p = \frac{p}{(C_0 + 3C_2)/(C_0 + C_1) + 2(p^2 / N) C_1 / (C_0 + C_1)},$$

$$E_p = \frac{1}{(C_0 + 3C_2)/(C_0 + C_1) + 2(p^2 / N) C_1 / (C_0 + C_1)} \cdot 100\%.$$

В худшем варианте $C_0 / C_1 \sim 5/3, \quad C_2 / C_1 \sim 1.2$ при $p << \sqrt{N}$ получим эффективность $E_p \approx 50.63\%$.

5. Следствия и обобщения

5.1. Циклическая прогонка.

В случае периодической задачи, в скалярном варианте используется алгоритм циклической прогонки. В нем фактически вводится аналогичный базис из двух функций на всем отрезке интегрирования, а короткая система содержит 2 неизвестных и решается любым способом. В параллельном алгоритме, на каждом процессоре вводится базис из трех функций, а короткая система содержит $2p - 1$ неизвестных и решается с помощью скалярного алгоритма циклической прогонки. Эффективность параллельного варианта может достигать ***67%***.

5.2. Интегральная прогонка.

Случай интегральных граничных условий аналогичен периодической задаче. Отличие: короткая система уравнений в параллельном алгоритме содержит $2p$ неизвестных и может решаться с помощью любого варианта метода скалярной прогонки. Эффективность параллельного варианта прогонки здесь также может быть равной ***100%***.

5.3. Немонотонная прогонка.

В случае немонотонного оператора ($r_0 \neq 0$) используется алгоритм немонотонной прогонки, который в скалярном случае требует введения аналогичных базисных функций. При этом аналогом разбиения по процессорам здесь является разбиение исходной области точками смены знака функции r_0. Если k – число смен знака, то короткая система уравнений содержит в скалярном алгоритме $2k$, а в параллельном - не более $2p+2k$ неизвестных. В обоих вариантах она решается ленточным методом Гаусса. Эффективность параллельного варианта может достигать ***100%*** поскольку скалярный вариант более трудоемок по сравнению с алгоритмом обычной прогонки. ***Если*** функция r_0 не меняет знак, то можно использовать левую или правую (в зависимости от знака r_0) немонотонную прогонку. Поэтому эффективность снизится до ***33%***, а время решения уменьшится в 3 раза.

5.4. Квазилинейный случай.

В квазилинейной постановке для реализации разностной схемы необходим итерационный процесс: МПИ или МН. В МН при условии локальной нелинейности (Ньютоновский оператор перехода не выходит за рамки шаблона разностной схемы, за исключением, быть может, граничных узлов) на каждой итерации получаем задачу типа (5), (6) и используем параллельную прогонку. Если оператор перехода меняется не на каждой итерации, то пересчитывать вторую и третью базисные функции на каждой итерации не нужно. В этом случае можно получить эффективность *~**100%***.

Задаем начальное приближение – вектор $\overset{0}{y} = (\overset{0}{y}_0, \ldots, \overset{0}{y}_N)$, и используем одну из процедур:

Метод простой итерации (МПИ):

$$-A_i(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{i-1} + C_i(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{i} - B_i(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{i+1} = F_i(\overset{s}{y}), \quad 1 \le i \le N-1,$$

$$C_0(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{0} - B_0(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{1} = F_0(\overset{s}{y}), \quad C_N(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{N} - A_N(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{N-1} = F_N(\overset{s}{y}), \quad s = 0,1,\ldots$$

Метод Ньютона (МН):

$$-A_i(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{i-1} + C_i(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{i} - B_i(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{i+1} + \theta\sum_{j=0}^{N}\left[-\frac{\partial A_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{i-1} + \frac{\partial C_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{i} - \frac{\partial B_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{i+1}\right]\left(\overset{s+1}{y}_j - \overset{s}{y}_j\right) =$$

$$= F_i(\overset{s}{y}) + \theta\sum_{j=0}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\left(\overset{s+1}{y}_j - \overset{s}{y}_j\right), \quad 1 \le i \le N-1,$$

$$C_0(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{0} - B_0(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{1} + \theta\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{\partial C_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{0} - \frac{\partial B_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{1}\right]\left(\overset{s+1}{y}_j - \overset{s}{y}_j\right) = F_0(\overset{s}{y}) + \theta\sum_{j=0}^{N}\frac{\partial F_0}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\left(\overset{s+1}{y}_j - \overset{s}{y}_j\right),$$

$$C_N(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{N} - A_N(\overset{s}{y})\,\overset{s+1}{y}_{N-1} + \theta\sum_{j=0}^{N}\left[-\frac{\partial A_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{N-1} + \frac{\partial C_i}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\overset{s}{y}_{N}\right]\left(\overset{s+1}{y}_j - \overset{s}{y}_j\right) = F_N(\overset{s}{y}) + \theta\sum_{j=0}^{N}\frac{\partial F_N}{\partial y_j}\left(\overset{s}{y}\right)\left(\overset{s+1}{y}_j - \overset{s}{y}_j\right).$$

5.5. Нестационарная задача.

В нестационарном случае есть аналогия с квазилинейным. Если функции k, r_i, q, составляющие оператор перехода со слоя на слой, постоянны или зависят только от *x*, то базисные функции $y^{(II)}, y^{(III)}$ можно вычислить только один раз (в начале расчета). Тогда на каждом слое по времени пересчитывается только $y^{(I)}$, и эффективность увеличивается до ***100%***. Если k, r_i, q слабо зависят от *t*, то, как и в методе Ньютона, их можно вычислять не на каждом слое по времени. В этом случае тоже можно получить высокую эффективность параллельного алгоритма.

5.6. Многомерный случай.

В случае многомерной краевой задачи в областях прямоугольной формы возможно эффективное использование параллельного алгоритма прогонки на этапах реализации итерационных или временных схем с факторизованным оператором. Примеры: решение многомерного уравнения Пуассона методом переменных направлений или решение многомерного уравнения теплопроводности с помощью локально-одномерных разностных схем. Эффективность получаемых здесь параллельных реализаций также может достигать ***100%***.

5.7. Матричная прогонка.

В случае систем уравнений вида (7)-(8) можно воспользоваться алгоритмом параллельной матричной прогонки, который строится на изложенных выше принципах. Очевидно, что во многих случаях и здесь удастся получить высокую эффективность распараллеливания.

Заключение:

1) Алгоритм параллельной прогонки обладает асимптотическим свойством, которое позволяет эффективно использовать его, как непосредственно, так и в комбинациях с другими методами.

2) Теоретическая эффективность параллельного алгоритма прогонки составляет от 33 до 100% в зависимости от вычислительной сложности исходной задачи и способа агрегирования параллельной прогонки с другими алгоритмами.