

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.63

О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА ДЛЯ $(\alpha-\beta)$ -ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА

© Б.Н. Четверушкин, Н.Г. Чурбанова

Всесоюзный центр математического моделирования АН СССР, Москва

Рассматривается возможность и эффективность распараллеливания $(\alpha-\beta)$ -итерационного алгоритма решения эллиптических уравнений. В качестве теста используется разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольной сетке. Рассматривается метод верхней релаксации в применении к $(\alpha-\beta)$ -алгоритму.

ON THE APPLICATION OF GEOMETRIC PARALLELISM PRINCIPLE TO $(\alpha-\beta)$ -ITERATION ALGORITHM

B.N. Chetverushkin, N.G. Chourbanova

The possibility and effectiveness of parallel realization of $(\alpha-\beta)$ -iteration algorithm for elliptic problem is considered in the paper. Finite difference Dirichlet problem for Poisson equation on a rectangular grid is examined as a test. Underrelaxation method applied to $(\alpha-\beta)$ -iteration algorithm is presented.

Введение. Одна из основных трудностей многих задач математической физики заключается в поиске достаточно эффективного способа решения системы сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации эллиптического уравнения. Оно входит составной частью в систему уравнений, и большая часть машинного времени уходит именно на него. Для решения ряда задач, таких как задачи РГД, описание течений вязкой жидкости, задачи ионосферной физики, с успехом применялся $(\alpha-\beta)$ -итерационный алгоритм [1-4]. Хотя его сходимость теоретически не доказана, практика показывает, что он сходится, и довольно быстро. Этот алгоритм не требует знания априорной информации, достаточно универсален. Основным его недостатком применительно к традиционной ЭВМ БЭСМ-6 является большой объем используемой оперативной памяти. Однако в последнее время в связи с появлением новой вычислительной техники, в том числе и нетрадиционной архитектуры, это ограничение отступает на второй план. Более того, при многопроцессорной реализации особенно важной становится возможность эффективного распараллеливания алгоритма.

В последнее время реальную возможность многопроцессорных вычислений создали комплексы на основе транспьютерных элементов [5], разработанных специально для использования в параллельных вычислительных системах. Ис-

пользуя систему транспьютеров, каждый из которых обладает собственной оперативной памятью, оказывается возможным, разбив область вычислений на несколько подобластей, проводить счет по всем подобластям одновременно, сокращая тем самым и объем требуемой памяти, и общее время счета. Данная работа посвящена возможностям и эффективности распараллеливания $(\alpha-\beta)$ -алгоритма, ориентированного на архитектуру транспьютерных комплексов.

1. **Краткое описание $(\alpha-\beta)$ -алгоритма и модельной задачи.** Нелинейный $(\alpha-\beta)$ -алгоритм используется для решения двумерного разностного эллиптического уравнения

$$A_{i,n}U_{i-1,n} + B_{i,n}U_{i+1,n} - C_{i,n}U_{i,n} + \bar{A}_{i,n}U_{i,n-1} + \bar{B}_{i,n}U_{i,n+1} = -F_{i,n}. \quad (1.1)$$

Граничные условия записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_{i,n} &= \varphi_{2,n}U_{2,n} + \xi_{2,n}, & U_{N_i,n} &= \varphi_{N_i-1,n}U_{N_i-1,n} + \xi_{N_i-1,n}, \\ U_{i,1} &= \varphi_{i,2}U_{i,2} + \xi_{i,2}, & U_{i,N_n} &= \varphi_{i,N_n-1}U_{i,N_n-1} + \xi_{i,N_n-1}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Предполагается, что решение удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} U_{i,n} &= \alpha_{i+1,n}U_{i+1,n} + \beta_{i+1,n}, & U_{i,n} &= \gamma_{i-1,n}U_{i-1,n} + d_{i-1,n}, \\ U_{i,n} &= \bar{\alpha}_{i,n+1}U_{i,n+1} + \bar{\beta}_{i,n+1}; & U_{i,n} &= \bar{\gamma}_{i,n-1}U_{i,n-1} + \bar{d}_{i,n-1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Используя эти предположения и уравнение (1.1), можно получить систему из восьми уравнений относительно функций $\alpha, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \beta, d, \bar{\beta}, \bar{d}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1,n} &= \frac{B_{i,n}}{C_{i,n} - \alpha_{i,n}A_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}\bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}, \\ \gamma_{i-1,n} &= \frac{A_{i,n}}{C_{i,n} - \gamma_{i,n}B_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}\bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}, \\ \bar{\alpha}_{i,n+1} &= \frac{\bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}\bar{A}_{i,n} - \alpha_{i,n}A_{i,n} - \gamma_{i,n}B_{i,n}}, \\ \bar{\gamma}_{i,n-1} &= \frac{\bar{A}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}\bar{B}_{i,n} - \alpha_{i,n}A_{i,n} - \gamma_{i,n}B_{i,n}}, \\ \beta_{i+1,n} &= \frac{F_{i,n} + \beta_{i,n}A_{i,n} + \bar{\beta}_{i,n}\bar{A}_{i,n} + \bar{d}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \alpha_{i,n}A_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}\bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}, \\ d_{i-1,n} &= \frac{F_{i,n} + d_{i,n}B_{i,n} + \bar{\beta}_{i,n}\bar{A}_{i,n} + \bar{d}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \gamma_{i,n}B_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}\bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}, \\ \bar{\beta}_{i,n+1} &= \frac{F_{i,n} + \beta_{i,n}A_{i,n} + d_{i,n}B_{i,n} + \bar{\beta}_{i,n}\bar{A}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}\bar{A}_{i,n} - \alpha_{i,n}A_{i,n} - \gamma_{i,n}B_{i,n}}, \\ \bar{d}_{i,n-1} &= \frac{F_{i,n} + \beta_{i,n}A_{i,n} + d_{i,n}B_{i,n} + \bar{d}_{i,n}\bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}\bar{B}_{i,n} - \alpha_{i,n}A_{i,n} - \gamma_{i,n}B_{i,n}}. \end{aligned}$$

Из условий (1.2) и (1.3) можно определить сеточную функцию U :

$$U_{i,n} = \bar{\alpha}_{i,n+1}U_{i,n+1} + \bar{\beta}_{i,n+1}, \quad U_{i,N_n} = \frac{\varphi_{i,N_n-1}\bar{\beta}_{i,N_n} + \xi_{i,N_n-1}}{1 - \varphi_{i,N_n-1}\bar{\alpha}_{i,N_n}}.$$

Итерационный процесс строится следующим образом. Система уравнений для α , γ , $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ автономна, поэтому в первый цикл расчетов входит вычисление этих величин. Процесс нахождения α , γ , $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ назовем α -процессом.

И т е р а ц и и в в е р х :

$$\alpha_{i+1,n}^{(s+1/2)} = \frac{B_{i,n}}{C_{i,n} - \alpha_{i,n}^{(s+1/2)} A_{i,n} - \alpha_{i,n}^{(s+1/2)} A_{i,n} - \gamma_{i,n}^{(s)} B_{i,n}},$$

$$i = 2, 3, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, 3, \dots, N_n - 1,$$

$$\gamma_{i-1,n}^{(s+1/2)} = \frac{A_{i,n}}{C_{i,n} - \gamma_{i,n}^{(s+1/2)} B_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}^{(s)} \bar{B}_{i,n}},$$

$$i = N_i - 1, \dots, 3, 2, \quad n = 2, 3, \dots, N_n - 1,$$

$$\bar{\alpha}_{i,n+1}^{(s+1/2)} = \frac{\bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{A}_{i,n} - \alpha_{i,n}^{(s+1/2)} A_{i,n} - \gamma_{i,n}^{(s+1/2)} B_{i,n}},$$

$$i = 2, 3, \dots, N_i - 1, \quad n = 2, 3, \dots, N_n - 1.$$

И т е р а ц и и в н и з :

$$\alpha_{i+1,r}^{(s+1)} = \frac{B_{i,n}}{C_{i,n} - \alpha_{i,n}^{(s+1)} A_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}^{(s+1)} \bar{B}_{i,n}},$$

$$i = 2, 3, \dots, N_i - 1, \quad n = N_r - 1, \dots, 3, 2,$$

$$\gamma_{i-1,r}^{(s+1)} = \frac{A_{i,n}}{C_{i,n} - \gamma_{i,n}^{(s+1)} B_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}^{(s+1)} \bar{B}_{i,n}},$$

$$i = N_i - 1, \dots, 3, 2, \quad n = N_n - 1, \dots, 3, 2,$$

$$\bar{\gamma}_{i,n-1}^{(s+1)} = \frac{\bar{A}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n}^{(s+1)} \bar{B}_{i,n} - \alpha_{i,n}^{(s+1)} A_{i,n} - \gamma_{i,n}^{(s+1)} B_{i,n}},$$

$$i = 2, 3, \dots, N_i - 1, \quad n = N_r - 1, \dots, 3, 2.$$

Итерации вверх и итерации вниз повторяются до тех пор, пока не достигнута точность

$$\Delta = \sqrt{\sum (\bar{\gamma}_{i,n}^{(s)} - \bar{\gamma}_{i,n}^{(s-1)})^2 h_i h_n} \leq 10^{-10}.$$

После окончания α -процесса аналогичным образом строится β -процесс, куда входят линейные уравнения для β , d , $\bar{\beta}$, \bar{d} .

В качестве теста бралась разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона, заданная на прямоугольной сетке

$$\omega = \{X_{i,n} = (ih_1, nh_2), 1 \leq i \leq N_i, 1 \leq n \leq N_n, h_1 = 1/N_{i-1}, h_2 = 1/N_{n-1}\}$$

в квадрате $\{1 \times 1\}$:

$$\Delta y = y_{\bar{x}_1, x_1} + y_{\bar{x}_2, x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega, \quad y(x)|_{\Gamma} = 0. \quad (1.4)$$

Правая часть φ подбирается из условия, чтобы функция $y = x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$ была точным решением разностной задачи (1.4). Начальные условия: $U^{(0)} = 0$.

После каждой β -итерации вычислялась норма погрешности $z^{(s)} = |U^{(s)} - y|$: $\epsilon = \sqrt{(Az, z)}$, где оператор $A = -\Delta$. Если $\epsilon \leq 10^{-4}$, то процесс считался законченным.

2. Разбиение на области для $(\alpha-\beta)$ -алгоритма. В [2] проводился один из возможных способов распараллеливания $(\alpha-\beta)$ -алгоритма. Здесь рассматривается другой подход к этой задаче, использующий внутренние граничные условия. Возможность применения такого подхода к аналогичному алгоритму была отмечена в работах [6, 7].

Разобьем счетную область на четное число подобластей. В качестве примера будем считать, что разбили область на четыре части (см. рис. 1).

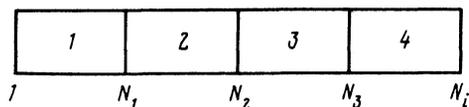


Рис. 1

Построим алгоритм вычислений так, чтобы счет по всем областям мог проходить параллельно. При вычислении $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\beta}$, \bar{d} это не вызовет затруднений. Однако прогонка для α , γ , β , d обычным способом не может быть проведена. Положим начальные приближения для этих функций $\alpha^{(0)} = \gamma^{(0)} = \beta^{(0)} = d^{(0)} = 0$ внутри области и будем проводить прогонку следующим образом.

Итерации в верх. Первый этап. В областях 1 и 3 вычисляется α от левой границы к правой, а в областях 2 и 4 вычисляется γ от правой границы к левой. После этого просчета между областями происходит обмен информацией: на границе N_1 и N_3 для областей 2 и 4 передаются вычисленные α , а для 1 и 3 — вычисленные γ .

Второй этап. В областях 1 и 3 вычисляется γ от правой границы к левой, а в областях 2 и 4 вычисляется α от левой границы к правой. На границе N_2 для области 3 передается вычисленное α , а для области 2 — вычисленное γ .

Третий этап. Во всех областях вычисляется $\bar{\alpha}$ на следующем слое.

Аналогично идут итерации вниз α -процесса, и аналогично строится β -процесс. Норма погрешности ϵ вычисляется суммарной по всей области.

Такой же процесс вычислений можно организовать для любого четного количества подобластей.

Расчеты показали хорошую сходимость описанного процесса. Число итераций, необходимых для достижения точности $\epsilon = 10^{-4}$, возрастает только на 20% при многопроцессорной реализации, соответствующей разбиению на области. Т.е. при достаточном числе параллельных процессоров распараллеливание $(\alpha-\beta)$ -алгоритма может оказаться весьма эффективным.

Для ускорения сходимости можно подобласти располагать "с залеганием" (весьма распространенный прием при таких разбиениях [8]), т.е. чтобы две соседние области перекрывали друг друга на границе на несколько точек (см. рис. 2). Тогда в передаче информации от подобласти к подобласти будет участвовать не одна граничная точка, а еще несколько приграничных. В проводимых расчетах область разбивалась на 8 подобластей, залегающих на три точки.

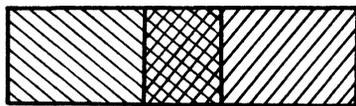


Рис. 2

В табл. 1 приведено число β -итераций, необходимых для достижения точности $\epsilon = 10^{-4}$: 1 — $(\alpha-\beta)$ -алгоритм применяется на всей области, не разбитой

на подобласти, 2 — область разбита на четыре подобласти, 3 — область разбита на восемь подобластей, 4 — область разбита на восемь подобластей с залеганием на три точки.

Т а б л и ц а 1

Сетка	1	2	3	4
41 × 11	17	20	23	19
81 × 11	19	23	27	23

Т а б л и ц а 2

Сетка	$\alpha-\beta$	$\alpha-\beta$ с релакс. $\omega = 1,1$
11 × 11	8	8
21 × 21	27	8
32 × 32	62	11
64 × 64	241	23

Разбивать область на части можно не только по индексу i , но и по индексу n . Проводились расчеты по области, разбитой на подобласти так, как показано на рис. 3.

Подобласти располагались и с залеганием, и без залегания. Счет по такой области организуется следующим образом.

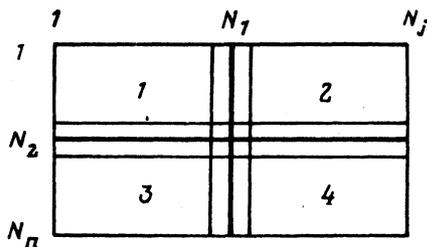


Рис. 3

Первый этап. В областях 1 и 3 считается α от 1 до N_1 . В областях 2 и 4 считается γ от N_j до N_1 . В областях 2 и 1 считается $\bar{\alpha}$ от 1 до N_2 . В областях 3 и 4 считается $\bar{\gamma}$ от N_n до N_2 . На границе N_1 области обменивают α и γ . На границе N_2 области обменивают $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$.

Второй этап. В областях 1 и 3 считается γ от N_1 до 1. В областях 2 и 4 считается α от N_1 до N_j . В областях 1 и 2 считается $\bar{\gamma}$ от N_2 до 1. В областях 3 и 4 считается $\bar{\alpha}$ от N_2 до N_n .

Расчеты показали, что точность достигается за столько же итераций, и при разбиении области на 4 части по индексу i . Т.е., для данной задачи способ разбиения не важен и на быстроту сходимости не влияет.

3. Применение метода верхней релаксации к $(\alpha-\beta)$ -алгоритму. В [3] был описан один из возможных способов применения метода релаксации к $(\alpha-\beta)$ -алгоритму. Здесь рассмотрен следующий способ. Применим метод верхней релак-

сации [9] к каждому из уравнений в β -итерациях. Будем считать по следующим формулам:

$$\beta_{i+1,n}^{(s+1/2)} = \omega \frac{F_{i,n} + \beta_{i,n}^{(s+1/2)} A_{i,n} + \bar{\beta}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{A}_{i,n} + \bar{d}_{i,n}^{(s)} \bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \alpha_{i,n} A_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n} \bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n} \bar{B}_{i,n}} + (1 - \omega) \beta_{i+1,n}^{(s)},$$

$$d_{i-1,n}^{(s+1/2)} = \omega \frac{F_{i,n} + d_{i,n}^{(s+1/2)} B_{i,n} + \bar{d}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{B}_{i,n}}{C_{i,n} - \gamma_{i,n} B_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n} \bar{A}_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n} \bar{B}_{i,n}} + (1 - \omega) d_{i-1,n}^{(s)},$$

$$\bar{\gamma}_{i,n-1}^{(s+1)} = \omega \frac{F_{i,n} + \beta_{i,n}^{(s+1/2)} A_{i,n} + d_{i,n}^{(s+1/2)} B_{i,n} + \bar{\beta}_{i,n}^{(s+1/2)} \bar{A}_{i,n}}{C_{i,n} - \bar{\gamma}_{i,n} \bar{B}_{i,n} - \alpha_{i,n} A_{i,n} - \gamma_{i,n} B_{i,n}} + (1 - \omega) \beta_{i,r+1}^{(s)}.$$

По аналогичным формулам считаются итерации вниз. Результаты счета по всей области, без разбиения ее на части, представлены в табл. 2.

Метод релаксации применялся и к распараллеленному $(\alpha-\beta)$ -алгоритму. Результаты представлены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Сетка	1 область без релаксации	8 областей без релаксации	1 область с релаксацией	8 областей с релаксацией	Релаксация с оптимальным параметром
41 × 11	17	23	6	7	48
81 × 11	19	27	6	9	100

Из таблиц видно, что применение релаксации заметно ускоряет сходимость итераций. Особенно сильно это сказывается при большом количестве расчетных точек. Сильно улучшается сходимость и в распараллеленных алгоритмах. Причем потери на распараллеливание для данной задачи совсем небольшие.

Для сравнения в табл. 3 дана скорость сходимости итераций при расчетах методом верхней релаксации с оптимальным параметром, примененным непосредственно к уравнению (1.1). Отметим, что на квадратной сетке скорость сходимости указанного метода и $(\alpha-\beta)$ -алгоритма примерно одинаковы. На вытянутых прямоугольных сетках преимущества применения релаксации к β -итерациям по сравнению с методом релаксации с оптимальным параметром становятся особенно очевидными.

Открытым остается вопрос о выборе оптимального параметра релаксации ω для β -итераций. В указанных расчетах ω подбирались эмпирическим путем. Следует отметить, что при достаточном опыте вычислений экспериментальный подбор параметра ω для конкретных задач особого труда не составляет.

В работах [6, 7] рассматривался другой способ ускорения сходимости итераций для аналогичного алгоритма.

Из всего сказанного можно сделать следующий вывод. Описываемый подход привлекателен в первую очередь для систем MIMD архитектуры, к которым относятся транспьютерные платы и комплексы [5]. Для систем данного типа наиболее предпочтителен вариант геометрического параллелизма, когда каждый процессор рассчитывает часть задачи, привязанную к определенной пространственной подобласти. Предложенный метод разбиения для $(\alpha-\beta)$ -итерационного алгоритма удобен для применения на многопроцессорной вычислительной системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Об одном итерационном алгоритме решения разностных уравнений // ЖВМ и МФ. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 519–524.
2. *Чурбанова Н.Г.* Некоторые модификации $(\alpha-\beta)$ -алгоритма решения эллиптических уравнений: Препринт № 46. М.: Ин-т прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, 1982.
3. *Мажорова О.С.* Итерационный метод решения двумерных матричных уравнений: Препринт № 48. М.: Ин-т прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, 1989.
4. *Клевицур С.В., Латышев Н.С., Четверушкин Б.Н.* Цилиндрический вариант $(\alpha-\beta)$ -итерационного алгоритма // Диф. ур. 1988. – Т. 24, № 7. – С. 1213–1218.
5. *Краснов С.А.* Транспьютеры, транспьютерные вычислительные системы и Оккам. – М.: Наука, 1990. – 352 с.
6. *Гольдин В.Я., Гольдина Д.А., Колпаков А.В.* О решении двумерной стационарной задачи квазидиффузии: Препринт № 49. М.: Ин-т прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, 1982.
7. *Гольдин В.Я., Колпаков А.В.* Комбинированные методы решения многомерной стационарной системы уравнений квазидиффузии // Вычислительные методы линейной алгебры. Труды Всесоюзной конференции. – М., 1982. – С. 60–71.
8. *Domain decomposition methods.* – Philadelphia: SIAM, 1989.
9. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 590 с.

Поступила в редакцию
15.04.91