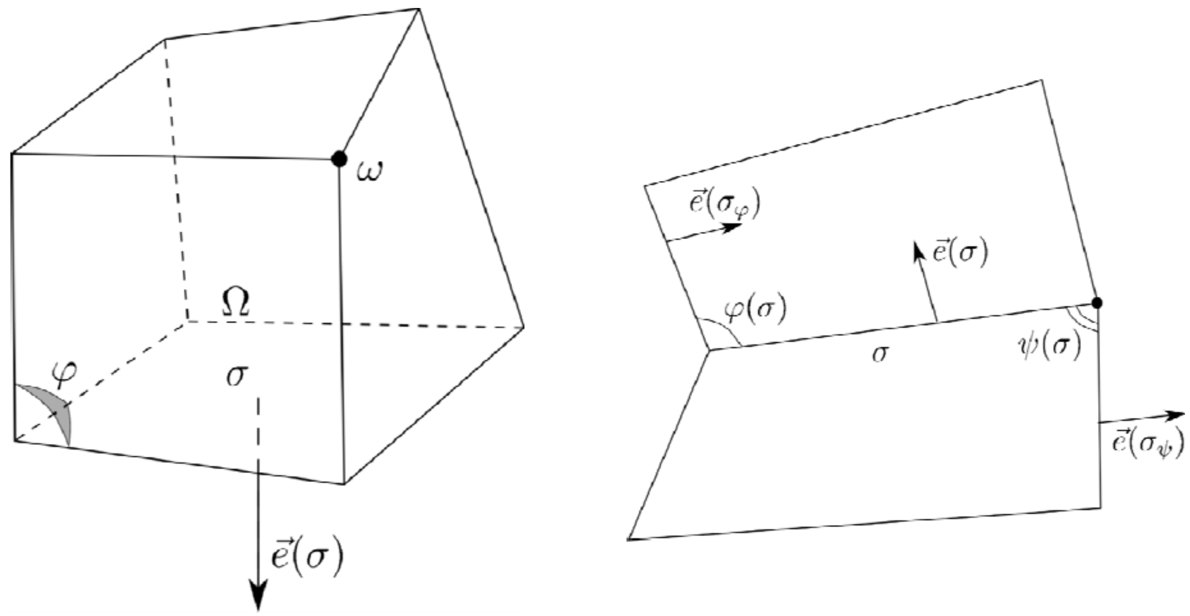
Тема: Разностные схемы методы опорных операторов (МОО)
для тепловых процессов.

Аннотация

Построение интегрально-согласованных сеточных операций DIV и GRAD для аппроксимации тепловых процессов на нерегулярных сетках. Самосопряженность и знакоопределенность повторной операции DIV GRAD. Сходимость разностных схем МОО для уравнения Пуассона на классических решениях. Аппроксимация тепловых процессов с учетом разрывности материальных свойств среды.

Метрические сетки метода опорных операторов для описания тепловых процессов



а) б)

Рис. 1. Ячейка квазирегулярной сетки

Сетки такого типа состоят из ячеек (Ω), образованных узлами (ω) и гранями (σ) (см. Рис. 1а). Узлам $\omega(\Omega)$, образующим ячейку Ω, соответствуют базисы $\varphi(\Omega)$ в этой ячейке, состоящие из единичных нормалей $\vec{e}(\sigma)$ к граням σ, образующим базис. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов $V_\varphi > 0$ с естественным условием нормировки $\sum\limits_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$. Т.е. сумма базисных объемов внутри ячейки Ω равна объему этой ячейки V_Ω. Например, для 2d-четырехугольной сетки $V_\varphi = \frac{1}{2} S_\varphi$, где S_φ - площадь треугольника, соответствующего базису φ. Компоненты напряженности гравитационного поля будем относить к сетке $(\sigma).(\varphi)$, состоящей из граней σ с нормалями к ним $\vec{e}(\sigma)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ). Сетка считается квазирегулярной (см. Рис. 1б) с порядком регулярности h^m, если для любого ее индекса σ и любых прилежащих к нему базисов $\varphi(\sigma), \psi(\sigma)$ существует взаимно-однозначное соответствие $\sigma_\varphi \leftrightarrow \sigma_\psi$ входящих в эти базисы индексов, так что в некоторой норме справедливо равенство:

$$\| \vec{e}(\sigma_\varphi) - \vec{e}(\sigma_\psi) \| = O(h^m) \tag{1}$$

здесь h - параметр малости на сетке.

Введем сеточное скалярное произведение

$$(\hbar_1, \hbar_2)_\sigma = \sum_\sigma V_\sigma \hbar_1(\sigma) \hbar_2(\sigma) \tag{2}$$

с весом $V_\sigma = \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi > 0$, понимаемым как пригранный объем.

Скалярное произведение $\int_O (\vec{\hbar}, \vec{g}) dV$ в области O аппроксимируется сеточным аналогом

$$\left(\bar{\hbar}, g'\right)_\sigma = \sum_\varphi V_\varphi \sum_{\sigma(\varphi),\ \tilde{\sigma}(\varphi)} Gr_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \bar{\hbar}(\sigma) \bar{g}(\tilde{\sigma}). \tag{3}$$

Здесь

$$g'(\sigma) = \frac{1}{V_\sigma} \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} Gr_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \bar{g}(\tilde{\sigma}) \tag{4}$$

или в операторной форме

$$g' = H \bar{g}. \tag{5}$$

Таким образом на сетке $(\sigma).(\varphi)$ мы ввели самосопряженный положительно определенный метрический сеточный оператор $H : (\sigma) \to (\sigma),\ H = H^* > 0$, задаваемый матрицами Грамма в локальных базисах $Gr_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) = (\vec{e}(\sigma), \vec{e}(\tilde{\sigma}))$ и переводящий сеточный аналог контравариантного представления $\bar{g}(\sigma)$, понимаемого нами как представление в среднем, в сеточный ковариантный аналог $g'(\sigma)$, называемый сопряженным представлением векторного поля $\vec{g}$.

Ковариантное представление сеточного скалярного произведения на сетке (σ).(φ)

Наряду со скалярным произведением, рассмотренным выше, аппроксимирующим интеграл $\int\limits_O (\vec{\hbar},\vec{g})dV$, рассмотрим на сетке $(\sigma).(\varphi)$ также ковариантное представление сеточного скалярного произведения

$$\left(\bar{\hbar},g'\right)_{\sigma}=\sum_{\varphi}V_{\varphi}\sum_{\sigma(\varphi),\tilde{\sigma}(\varphi)}Gr_{\varphi}^{'}(\sigma,\tilde{\sigma})\hbar'(\tilde{\sigma})g'(\sigma). \tag{6}$$

Здесь

$$\bar{\hbar}(\sigma)=\frac{1}{V_{\sigma}}\sum_{\varphi(\sigma)}V_{\varphi}\sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)}Gr_{\varphi}^{'}(\sigma,\tilde{\sigma})\,\hbar'(\tilde{\sigma}) \tag{7}$$

или в операторной форме

$$\bar{\hbar}=G\hbar'. \tag{8}$$

Таким образом на сетке $(\sigma).(\varphi)$ введен самосопряженный положительно определенный метрический сеточный оператор $G:(\sigma)\rightarrow(\sigma),\ G=G^{*}>0$ задаваемый семейством базисных матриц Грамма $Gr_{\varphi}^{'}(\sigma,\tilde{\sigma})=(\vec{e}_{\varphi}^{\,'}(\sigma),\vec{e}_{\varphi}^{\,'}(\tilde{\sigma}))$. В этих матрицах $\vec{e}_{\varphi}^{\,'}(\sigma)$ - взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ орты по отношению к исходным (ковариантным) нормалям $\vec{e}(\sigma)$ к граням *σ*. К сетке $(\sigma).(\varphi)$ с метрическим оператором G в дальнейшем будем относить также компоненты напряженности магнитного поля $\vec{\hbar}$.

Дискретная тепловая модель.

Определим разностную дивергенцию $DIV:(\sigma)\rightarrow(\Omega)$ по формуле:

$$DIV\vec{g}=\frac{1}{V_{\Omega}}\sum_{\sigma(\Omega)}s_{\sigma}(\Omega)g'(\sigma)s(\sigma) \tag{9}$$

и скалярное произведение в ячейках

$$(F_1, F_2)_\Omega = \sum_\Omega V_\Omega \ F_{1\Omega} \ F_{2\Omega}. \qquad (10)$$

Здесь $s(\sigma)$ - площадь грани σ. $s_\sigma(\Omega)$ - знаковая функция, равная единице, если нормаль $\vec{e}(\sigma)$ для ячейки Ω внешняя и минус единице наоборот.

Далее, для области *O*, ограниченной поверхностью Σ, моделируя интегральное соотношение

$$\int_O grad\ F\ \vec{\hbar}\ dV + \int_O F\ div\vec{\hbar}\ dV = \int_\Sigma F\vec{\hbar}d\vec{s}, \qquad (11)$$

определим разностный оператор $GRAD: (\Omega) \to (\sigma)$ из тождества

$$(\overline{GRAD\ F}, \hbar')_\sigma + (F, DIV\vec{\hbar})_\Omega = \sum_{\partial\sigma} s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma} \hbar'(\partial\sigma) s(\partial\sigma). \qquad (12)$$

Здесь для граничной грани $\partial\sigma$ $s(\partial\sigma)$ - ее площадь $s_{\partial\sigma}$ - единица, если нормаль $\vec{e}(\partial\sigma)$ - внешняя к аппроксимации области *O*. Наконец, $F_{\partial\sigma}$ - температура на этой граничной грани. Подчеркнем, что F и $\hbar' = H\bar{\hbar}$ здесь, вообще говоря, любые сеточные функции. Отсюда на грани σ

$$\overline{GRAD\ F} = \frac{\Delta F}{h'}, \qquad (13)$$

где

$$\Delta F = -\sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma(\Omega)} F_\Omega + s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma}. \qquad (14)$$

Второе слагаемое в приращении температуры через грань здесь существует, если эта грань граничная

$$h' = \frac{V_\sigma}{s(\sigma)} \qquad (15)$$

На граничных гранях $\partial\sigma = \{\partial_1\sigma \mid \partial_0\sigma\}$ считается заданной величина $F_{\partial_1\sigma}$ – первая краевая задача, или ее поток $GRAD\ F'(\partial_0\sigma)$ – неймановское граничное условие. Оператор $DIV\ GRAD: (\Omega) \to (\Omega)$, т.ч. $-DIV\ GRAD = (-DIV\ GRAD)^* \geq 0$ оказывается при этом самосопряженным и неотрицательным согласно (27) в смысле скалярного произведения (25). Аналогично свойствами самосопряженности и неотрицательности обладает оператор $-GRAD\ DIV: (\sigma) \to (\sigma)$.

Литература

1) Samarskii AA, Koldoba AV, PoveshchenkoYuA, Tishkin VF, Favorsky AP. Different Schemes on the Non-regulated Grids. Criterion; 1996. [In Russian].
2) Lipnikov K, Manzini G, Shashkov M. Mimetic finite difference method. J Comput Phys. 2013;257:1163-1227.
3) Poveshchenko YuA, Podryga VO, Rahimly OR.On some integral ‐ consistent methods for calculating magnetohydrodynamic phenomena in problems of computational astrophysics. Mathematical Methods in the Applied Sciences / Volume 43, Issue 13 https://onlinelibrary.wiley.com/journal/10991476
4) ПовещенкоЮ.А., ПодрыгаВ.О., Шарова Ю.С., Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // ПрепринтыИПМим. М.В. Келдыша. – 2018. – № 160. – 21с. DOI:10.20948/prepr-2018-160
5) КолдобаА.В.,Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое модеатическое моделирование, 2012, том 24, N12, с. 86-96.
6) Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Головченко Е.Н., Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2019. – № 10. – 36 с. DOI:10.20948/prepr-2019-10
7) Koldoba AV, PergamentAKh, PoveshchenkoYuA, Simus NA. Porous media strain-stressed state occasioned by fluid injection 1999; 11(10):3-16. [In Russian].
8) Повещенко Ю.А.,Гасилов В.А., Подрыга В.О. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризациейи решения. Дифференциальные уравнения, издательство МАИК, 2019, том 55, N 7, с. 1009-1022.
9) ПовещенкоЮ.А., Ладонкина М.Е., ПодрыгаВ.О.,Рагимли О.Р., Шарова Ю.С., Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения // ПрепринтыИПМим. М.В. Келдыша. – 2019. – № 14. – 23с. DOI:10.20948/prepr-2019-14
10) Попов Ю.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015.
11) КолдобаА.В.,Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000, 254 с,
12) PoveshchenkoYu.A, Rahimly P.I., Rahimly O.R., Podryga V.O., Gasilova I.V. A Numerical Approach to Study the Thermal Influence on Gas Hydrates by Physical

Process Splitting // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. – 2020. – V. 17, №3. – P. 404–433.

13) Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б. Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2018. – № 40. – 32 с. DOI:10.20948/prepr-2018-40

Дополнительная литература

1) А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. М.: Наука,
2) А.А. Самарский. Теория разностных схем. М.: Наука, 1990.