Курс "Компьютерные технологии"

Введение

Данный курс имеет целью подготовку магистров к решению сложных инженерных и научных задач гидродинамики и теплофизики на компьютерных системах. Ядром курса являются проблемы численного решения данного класса задач с помощью сеточного метода опорных операторов (МОО). Данный метод обладает свойствами универсальности, консервативности и регулируемым порядком аппроксимации и точности на сетках различного типа. Его упрощенные аналоги используются во многих пакетах для CFD-моделирования.

Тема: Нерегулярные метрические сетки в методе опорных операторов (МОО).

Аннотация

1. Нерегулярные сетки. Общие понятия. Исходный и сопряженный сеточные базисы. Аппроксимация векторно-тензорных полей на сетках нерегулярной структуры. Специфика ко- и контравариантных представлений в дискретном случае. Среднее и сопряженное представление сеточных тензорных полей.
2. Метрические сетки МОО. Метрическая калибровка разностной сетки. Конструкция замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток: треугольно-четырехугольных 2D сеток, тетраэдральных, параллелепипедо-подобных, призматических, мортарно-несогласованных и т.д. Самосопряженный, положительно-определенной метрический оператор нерегулярной сетки. Квазирегулярные сетки. Самосопряженный, положительно-определенной метрический оператор квазирегулярной сетки.
3. Скалярно-дивергентные задачи на нерегулярных сетках. Представление о сеточных аппроксимациях DIV и GRAD.

Для метрических сеток метода опорных операторов, состоящих из ячеек (Ω) образованных узлами (ω), гранями (σ) и ребрами (λ) характерно наличие замкнутой сопряженной («сдвинутой») сетки, состоящей, например, из доменов $d(\omega)$ вокруг узлов ω (см. рис.1).

Грани узлового домена определяются метрическим оператором сетки $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=$ $=\sum\limits_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ (см. также ниже). Базисы $\varphi(\lambda)$ здесь попарно входят в ячейки $\Omega(\lambda)$, примыкающие к ребру λ. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов (с естественным условием нормировки $\sum\limits_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$). Она определяет конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четырехугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические и т.д. 3D сетки, а также их мортарные сшивки, адаптация (с введением новых узлов в ячейках Ω) с сохранением самосопряженности и знакоопределенности соответствующих «дивергентно-градиентных» операций векторного анализа континуальных краевых задач. Дальнейшее изложение носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов V_φ иллюстрируется на примере треугольно-четырехугольной 2D сетки.

В области O введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними $(\sigma(\lambda))$ – границами балансовых узловых доменов $d(\omega)$ (см. рис.1).

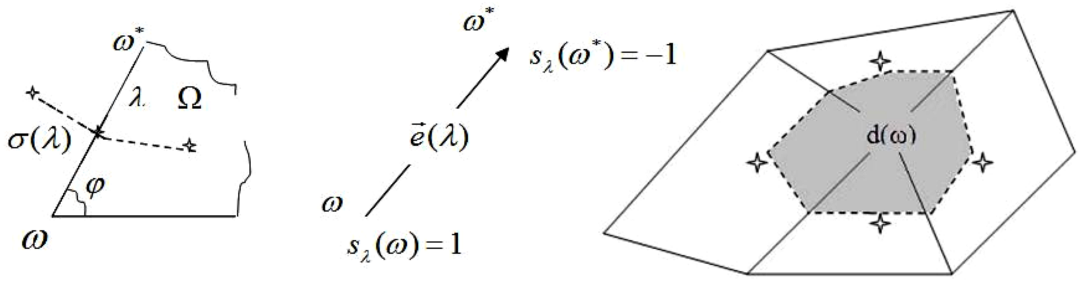

Рис.1. Построение базисов.

Базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\mathbf{e}(\lambda)$, образованных ребрами. Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω, их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой поверхность

$$\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum_{\varphi(\lambda)} v_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \quad ,$$

ориентированную так же, как и орт $\mathbf{e}(\lambda)$. Здесь $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\mathbf{e}(\lambda)$. Базисный объем дается формулой $v_\varphi = \frac{1}{6}\left|\mathbf{e}(\lambda_1)\times\mathbf{e}(\lambda_2)\right|$ для треугольной ячейки Ω, содержащей базис φ, и $v_\varphi = \frac{1}{4}\left|\mathbf{e}(\lambda_1)\times\mathbf{e}(\lambda_2)\right|$ для четырехугольной ячейки, если $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ – ребра, образующие базис φ. Наконец, $\sum\limits_{\varphi(\lambda)}$ – суммирование по всем базисам φ, в образовании которых приняло участие ребро λ. Замкнутые вокруг узла ω поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda(\omega))$ образуют узловые домены $d(\omega)$.

Скалярно-дивергентные задачи.

В пространственной области *O* с границей ∂O рассмотрим скалярно-дивергентную задачу:

$$\mathrm{div}\mathbf{X}_u = f(r), \qquad \mathbf{X}_u = K\nabla u$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с соответствующим интегральным соотношением:

$$\int\limits_{\mathrm{O}} \left(\mathbf{X}\ \nabla u\right) dv + \int\limits_{\mathrm{O}} u\ \mathrm{div}\mathbf{X}\ dv = \int\limits_{\partial\mathrm{O}} u\left(\mathbf{X},\, \mathbf{ds}\right).$$

Здесь *u* – скаляр (температура, давление и т.п.); **X** – произвольный вектор; $\mathbf{X}_u$ – потоки, вызванные градиентом функции *u* в среде со свойствами проводимости, определяемыми тензором *K*.

В области О вводится семейство нерегулярных разностных сеток, обладающих метрическими свойствами, и соответствующих сеточных функций. Внутреннюю дивергенцию векторного поля DIN: $(\varphi)\to(\omega)$ определим, аппроксимируя теорему Гаусса на $d(\omega)$:

$$\mathrm{DIN}\,X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\ \tau_X(\lambda), \qquad \tau_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_\varphi(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\ \mathbf{X}_\varphi).$$

Здесь $\sum\limits_{\lambda(\omega)}$ – суммирование по всем ребрам λ, имеющим общий узел ω.

Сеточное векторное поле **X** задается своими представлениями в базисах X_φ. Обозначая через $(\quad)_\Delta$ аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$(\int\limits_{O}(\mathbf{X},\nabla u)\,dv)_\Delta=-(\int\limits_{O}u\,\mathrm{div}\mathbf{X}dv\ -\int\limits_{\partial O}u(\mathbf{X},\ \mathbf{d}s))_\Delta$$
$$=-\sum_{\omega}(u_\omega,\mathrm{DIN}\ \mathbf{X})=\sum_{\varphi}v_\varphi(\mathbf{X}_\varphi,\ \mathrm{GRAD}\ u).$$

Градиентное векторное поле GRAD: $(\omega)\to(\varphi)$ дается своими представлениями в базисах:

$$\mathrm{GRAD}\ u=\sum_{\lambda(\varphi)}\Delta_\lambda u\ \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\ ,\qquad \Delta_\lambda u=-\sum_{\omega(\lambda)}s_\lambda(\omega)\ u_\omega=u_{\omega^*}-u_\omega\,.$$

Полагая в базисах φ в качестве $\mathbf{X}_\varphi$ векторное поле $\mathbf{X}_{v\varphi}=K_\varphi\mathrm{GRAD}v$, получим самосопряженный неотрицательный оператор $-\mathrm{DIV}\,\mathbf{X}_v{:}(\omega)\to(\omega)$ или $-\mathrm{DIV}\,K\ \mathrm{GRAD}{:}(\omega)\to(\omega)$. Здесь потоковое векторное поле $\mathbf{X}_v$ дается своими компонентами в базисах $\mathbf{X}_{v\varphi}$. Оно определяется градиентными свойствами скалярной сеточной функции v, заданной в узлах ω, и сеточным тензорным полем проводимости K, задаваемым своими представлениями в базисах K_φ. Этот оператор будет строго положительным, если хотя бы в одном граничном узле связной разностной сетки задана первая краевая задача, т.е. в этом граничном узле скалярная сеточная функция обращается в ноль.

Литература

1) Samarskii AA, Koldoba AV, PoveshchenkoYuA, Tishkin VF, Favorsky AP. Different Schemes on the Non-regulated Grids. Criterion; 1996. [In Russian].
2) Lipnikov K, Manzini G, Shashkov M. Mimetic finite difference method. J Comput Phys. 2013;257:1163-1227.
3) Poveshchenko YuA, Podryga VO, Rahimly OR.On some integral‐consistent methods for calculating magnetohydrodynamic phenomena in problems of computational astrophysics. Mathematical Methods in the Applied Sciences / Volume 43, Issue 13 https://onlinelibrary.wiley.com/journal/10991476
4) ПовещенкоЮ.А., ПодрыгаВ.О., Шарова Ю.С., Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // ПрепринтыИПМим. М.В. Келдыша. – 2018. – № 160. – 21с. DOI:10.20948/prepr-2018-160
5) КолдобаА.В.,Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Математическое модеатическое моделирование, 2012, том 24, N12, с. 86-96.

6) Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Головченко Е.Н., Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2019. – № 10. – 36 с. DOI:10.20948/prepr-2019-10
7) Koldoba AV, PergamentAKh, PoveshchenkoYuA, Simus NA. Porous media strain-stressed state occasioned by fluid injection 1999; 11(10):3-16. [In Russian].
8) Повещенко Ю.А.,Гасилов В.А., Подрыга В.О. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризациейи решения. Дифференциальные уравнения, издательство МАИК, 2019, том 55, N 7, с. 1009-1022.
9) ПовещенкоЮ.А., Ладонкина М.Е., ПодрыгаВ.О.,Рагимли О.Р., Шарова Ю.С., Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения // ПрепринтыИПМим. М.В. Келдыша. – 2019. – № 14. – 23с. DOI:10.20948/prepr-2019-14
10) Попов Ю.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015.
11) КолдобаА.В.,Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф. Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000, 254 с,
12) PoveshchenkoYu.A, Rahimly P.I., Rahimly O.R., Podryga V.O., Gasilova I.V. A Numerical Approach to Study the Thermal Influence on Gas Hydrates by Physical Process Splitting // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. – 2020. – V. 17, №3. – P. 404–433.
13) Рагимли П.И., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Попов С.Б. Моделирование процессов совместной фильтрации в талой зоне и пьезопроводной среде с газогидратными включениями // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2018. – № 40. – 32 с. DOI:10.20948/prepr-2018-40

Дополнительная литература

1) А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. М.: Наука,
2) А.А. Самарский. Теория разностных схем. М.: Наука, 1990.