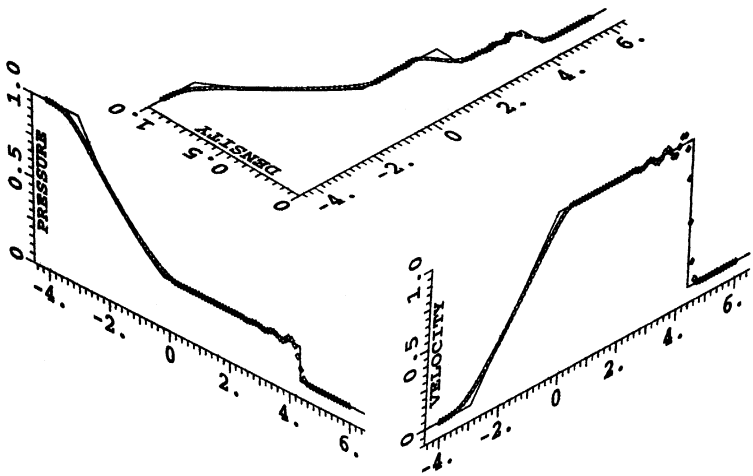


А. С. Лебедев
С. Г. Черный

ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С.Лебедев

С.Г.Черный

**ПРАКТИКУМ
ПО ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

Учебное пособие

Новосибирск
2000

ББК 22.253

УДК 517.949.8+533

Лебедев А.С., Черный С.Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. — Учебн. пособие. Новосиб. госуд. ун-т. Новосибирск, 2000.

В учебном пособии излагаются методы, технические приемы и теоретические результаты, необходимые для численного решения на ЭВМ дифференциальных уравнений в частных производных. Математические модели такого рода встречаются в математике, физике и многих других областях знаний.

Большое внимание в пособии уделяется практической части процесса математического моделирования — воплощению теоретически разработанного численного метода в реализующую его компьютерную программу. Обсуждаются такие элементы качественного программирования, как надежность, работоспособность, экономичность. Затрагивается также важный вопрос о представлении получаемых результатов в графическом виде, облегчающем их дальнейший анализ.

Рассмотрение названных выше аспектов численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на компьютерах проводится главным образом на примере нелинейного уравнения переноса, которое является составной частью многих математических моделей. Изложенные методы и подходы обобщаются на систему уравнений.

Пособие предназначено для студентов механико-математического, физического и других факультетов и окажет им помощь в практических занятиях на ЭВМ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент Г.С. Хакимзянов

Редактор *Е. С. Дорошенко*

Подписано в печать 30.03.2000 г.
Уч.-изд. л. 8,5. Тираж 300 экз.

Формат 60×84 1/16.
Заказ № 216.

Офсетная печать.
Цена 18 р.

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.

Редакционно-издательский центр НГУ; 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

© Новосибирский государственный университет, 2000

Оглавление

ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА.....	6
§1. Точное решение задачи Коши.....	6
§2. Возникновение "градиентной катастрофы".....	7
§3. Эволюция разрыва.....	8
§4. Некоторые постановки задач. Точные решения.....	10
4.1. Задача Коши для линейного уравнения переноса.....	10
4.2. Начально-краевая задача для нелинейного уравнения переноса.....	11
ГЛАВА 2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ.....	13
§1. Понятие разностной схемы.....	14
§2. Сходимость.....	17
§3. Аппроксимация.....	19
§4. Устойчивость.....	21
§5. Зависимость между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью.....	28
§6. Консервативность.....	29
§7. Численная диссипация и дисперсия.....	36
§8. Монотонность.....	41
§9. Невозрастание полной вариации (TVD).....	44
§10. Некоторые схемы для уравнения переноса.....	51
10.1. Линейное уравнение переноса.....	51
Явная схема с разностями против потока.....	51
Явная схема с центральной разностью.....	52
Схема Лакса.....	52
Неявная схема с центральной разностью.....	52
Схема с перешагиванием (схема "чехарда").....	53
Схема Лакса – Вендроффа.....	53
Схема Макормака.....	54
Схема Кранка – Николсона.....	54
Трехслойная неявная схема.....	54
Компактная схема повышенного порядка аппроксимации.....	55
TVD-схемы.....	55
10.2. Уравнение Бюргерса в дивергентной форме.....	57
TVD-модификация схемы Лакса – Вендроффа.....	57

Противопоточная TVD-схема второго порядка точности по пространственной переменной.....	57
---	----

ГЛАВА 3. СИСТЕМА ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ.....	58
---	-----------

§1. Формы записи уравнений газовой динамики.....	58
1.1. Интегральные законы сохранения.....	58
1.2. Дивергентная форма записи.....	60
1.3. Недивергентная форма записи.....	60
1.4. Соотношения на сильном разрыве.....	62
§2. Свойства уравнений газовой динамики.....	63
2.1. Гиперболичность.....	63
2.2. Характеристическая форма уравнений.....	64
2.3. Однородность вектора потоков.....	65

ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ.....	65
---	-----------

§1. Задача о работе ударной трубы.....	66
1.1. Постановка задачи.....	66
1.2. Точное решение.....	66
1.3. Задание расчетной области.....	68
§2. Квазиодномерное течение в канале.....	70
2.1. Квазиодномерные уравнения газовой динамики.....	70
2.2. Точное решение.....	71
2.3. Гладкое течение в канале.....	73
2.4. Разрывное течение в канале.....	74
2.5. Метод установления и задание дополнительных усло- вий.....	75

ГЛАВА 5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗО- ВОЙ ДИНАМИКИ.....	76
--	-----------

§1. Схема Лакса.....	77
Схема 1 (Лакс).....	78
Параметры тестовой задачи о работе ударной трубы.....	80
§2. Явные схемы первого порядка.....	82
Схема 2.....	88
Схема 3.....	88

Схема 4.....	88
Схема 5.....	90
Схема 6.....	94
Схема 7 (Годунов – Van Leer).....	94
Схема 8 (Steger – Warming).....	94
Схема 9.....	95
Схема 10 (Годунов).....	97
Схема 11 (P.L.Roe).....	97
§3. Схема Лакса – Вендроффа.....	100
Схема 12 (Лакс – Вендрофф).....	101
Схема 13 (Лакс – Вендрофф, двухшаговая).....	104
Схема 14 (Маккормак).....	104
§4. TVD-модификация схемы Лакса – Вендроффа.....	104
Схема 15 (Лакс – Вендрофф, TVD-модификация).....	107
§5. Неявные схемы.....	108
Схема 16 (векторная прогонка).....	110
Схема 17 (векторная прогонка).....	112
Схема 18 (бегущий счет).....	113
Схема 19 (бегущий счет).....	115
Схема 20.....	116
Схема 21.....	118
Схема 22.....	119
Схема 23.....	120
Схема 24 (Маккормак, неявная).....	122
§6. Квазиодномерное течение в канале. Примеры расчетов.....	123
Параметры тестовой задачи о гладком квазиодномерном течении в канале.....	124
Параметры тестовой задачи о разрывном квазиодномер- ном течении в канале.....	125
ГЛАВА 6. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ.....	130
ЛИТЕРАТУРА.....	137

Глава 1. Уравнение Бюргерса

Основные понятия и идеи, лежащие в основе современных численных методов решения уравнений в частных производных, рассмотрим на примере простейшего скалярного нелинейного уравнения переноса

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1)$$

которое иногда называют невязким уравнением Бюргерса. Прежде чем мы перейдем к численным методам решения уравнения (1), исследуем его свойства.

§1. Точное решение задачи Коши

Левую часть уравнения (1) можно рассматривать как производную от u вдоль кривой $x = x(t)$, заданной уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u. \quad (2)$$

В самом деле,

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t \frac{dt}{dt} + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + uu_x.$$

Кривые, удовлетворяющие уравнению (2), называются характеристиками уравнения (1) [1]. Таким образом, если функция u является решением уравнения (1), то она не изменяется вдоль характеристик (2). А из того, что u является константой в (2) (своей для каждой характеристики!), в свою очередь, следует, что все характеристики уравнения (1) — прямые линии.

Поставим для уравнения (1) задачу Коши. В области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению (1) и принимающую при $t = 0$ заданные значения

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Сформулированная задача решается следующим образом. В точке P с координатами (x, t) функция $u(x, t)$ равна значению, приносимому туда вдоль характеристики с линии $t = 0$ (рис. 1), т. е. $u(x, t) = \varphi(x^*)$, где x^* — точка пересечения характеристики с линией задания начальных данных $t = 0$. Уравнение этой характеристики

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) = \varphi(x^*)$$

после интегрирования принимает вид

$$x - t\varphi(x^*) = x^*.$$

Беря левую и правую часть последнего равенства в качестве аргумента функции φ , получаем

$$\varphi(x - t\varphi(x^*)) = \varphi(x^*).$$

Вспоминая, что $u(x, t) = \varphi(x^*)$, приходим к представленному в неявном виде решению нашей задачи

$$u(x, t) = \varphi(x - ut). \quad (3)$$

Заметим, что указанный способ решения непригоден, если с линии задания начальных данных в точку (x, t) либо приходит сразу несколько характеристик, либо не приходит ни одной.

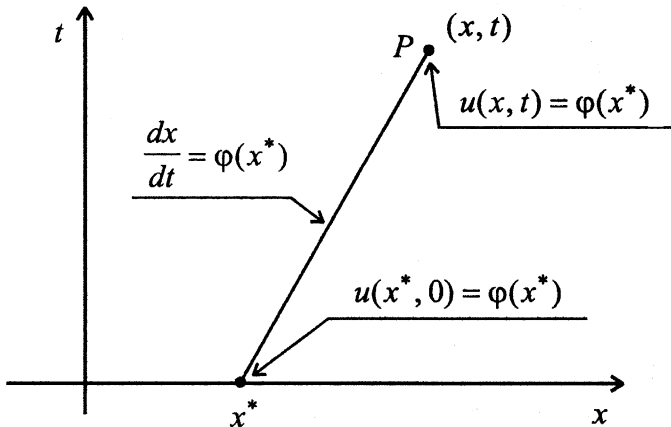


Рис. 1

§2. Возникновение "градиентной катастрофы"

Продифференцируем обе части равенства (3) по x [2]:

$$u_x = \varphi' \cdot (1 - u_x t),$$

затем найдем из полученного соотношения выражение для u_x :

$$u_x = \frac{\varphi'}{1 + \varphi' t}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что если функция $\varphi(x)$, задающая начальное распределение, является убывающей, т. е. $\varphi'(x) < 0$, то наступит момент

$t^* = -1/\varphi'(x) > 0$, когда производная u_x перестанет существовать. Такая ситуация соответствует пересечению двух или более характеристик, которые с линии $t = 0$ независимо приносят в одну точку области различные значения функции. Выходом из положения является допущение о возможности существования разрыва в решении. В момент пересечения характеристик — его еще называют моментом возникновения "градиентной катастрофы" [3] — решение становится разрывным.

§3. Эволюция разрыва

В точке разрыва производные не определены и дифференциальные уравнения теряют смысл. Необходимо заменить их соотношениями, которые свяжут значения функций по обе стороны разрыва. Эти соотношения должны выражать для разрывных решений те же физические законы, что и дифференциальные уравнения — для гладких. Интегральное соотношение, эквивалентное дифференциальному уравнению (1) на гладком решении, имеет вид

$$\oint_{\Gamma} u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0, \quad (5)$$

где Γ — произвольный контур, лежащий в полуплоскости $t > 0$ [4]. Равенство (5) выражает закон сохранения: поток вектора $(u, u^2/2)$ через любой замкнутый контур равен нулю. В (5) уже можно не требовать от функции $u(x, t)$ ни гладкости, ни непрерывности. Поэтому для получения соотношений на разрыве следует использовать (5).

Разрыв в решении, возникнув, затем перемещается, описывая в плоскости x, t некоторую кривую $x = X(t)$. Возьмем в качестве контура Γ криволинейный четырехугольник $ABCD$, который пересекается линией разрыва $x = X(t)$ в точках E и F (рис. 2). Тогда соотношение (5) принимает вид

$$\oint_{ABCD} u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0.$$

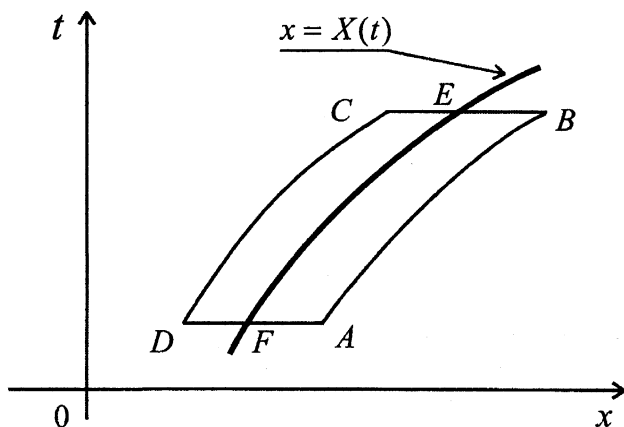


Рис. 2

Когда отрезки BC и DA стягиваются к точкам E и F соответственно, интегралы по ним обращаются в нуль и получается равенство

$$\int_{EF} \left([u] dx - \left[\frac{u^2}{2} \right] dt \right) = 0,$$

которое, с учетом того, что на линии разрыва выполняется соотношение

$$dx = \frac{dX}{dt} dt, \text{ переписывается в виде}$$

$$\int_{EF} \left([u] \frac{dX}{dt} - \left[\frac{u^2}{2} \right] \right) dt = 0.$$

Здесь $[z] = z_R - z_L$ есть скачок величины z на линии разрыва, а EF — произвольный участок этой линии. Ввиду произвольности участка EF подынтегральная функция должна равняться нулю в каждой точке линии $x = X(t)$:

$$[u] \frac{dX}{dt} - \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dX}{dt} = \frac{[u^2/2]}{[u]} = \frac{u_R^2 - u_L^2}{2(u_R - u_L)} = \frac{u_R + u_L}{2}.$$

Таким образом, на линии разрыва выполнено условие

$$\frac{dX}{dt} = \frac{u_R + u_L}{2}. \quad (6)$$

§4. Некоторые постановки задач. Точные решения

В данном разделе приводятся постановки задач для линейного уравнения переноса и нелинейного уравнения Бюргерса. Благодаря наличию точных (аналитических) решений эти задачи являются прекрасными тестами для излагаемых ниже численных методов решения уравнения Бюргерса.

4.1. Задача Коши для линейного уравнения переноса

Найти решение задачи Коши

$$u_t + au_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ a = \text{const} > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0,5, & x > L, x < 0 \\ \varphi_0(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Численное решение находить на отрезке $0 \leq x \leq 100$ при $L = 20$. На границах отрезка ставить условия периодичности. Рассмотреть следующие варианты.

Синусоидальный импульс

$$\varphi_0(x) = 0,5 + 0,75[1 + \sin(\pi x / 10 - \pi / 2)].$$

Импульс прямоугольной формы

$$\varphi_0(x) = 2.$$

Треугольный импульс

$$\varphi_0(x) = 0,5 + 0,075x.$$

Точным решением всех этих задач Коши будетдвигающийся вправо со скоростью a начальный профиль функции u .

4.2. Начально-краевая задача для нелинейного уравнения переноса

Распад произвольного разрыва: ударная волна

Найти решение начально-краевой задачи

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$u(0,t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

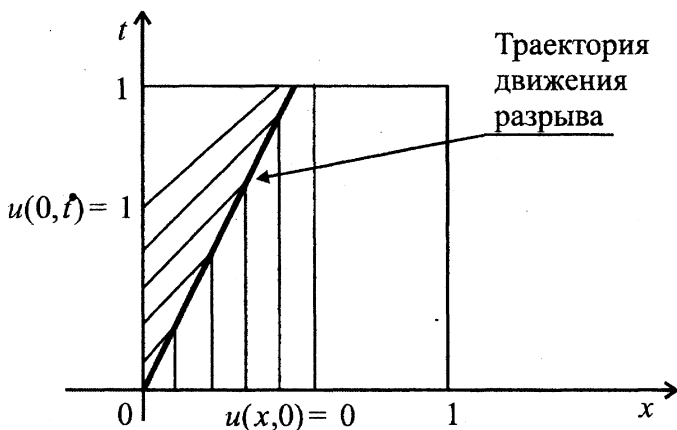


Рис. 3

На рис. 3 изображены характеристики и траектория разрыва. Тангенс угла наклона линии разрыва (см. формулу (6)) является средним арифметическим тангенсов углов наклона характеристик по обе стороны от нее:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Распад произвольного разрыва: волна разрежения

Найти решение начально-краевой задачи

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(x,0) = 1, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

В данном случае устойчивым будет непрерывное решение [4], структура которого показана на рис. 4. Решение можно записать в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x/t, & 0 < x < t, \\ 1, & x \geq t. \end{cases}$$

Рассматриваемая задача похожа на задачу о распространении централизованной волны разрежения в сжимаемой жидкости. В случае уравнения Бюргера волна разрежения слева ограничена линией $x = 0$, а справа — проходящей через начало координат характеристикой, наклоненной к оси x под углом 45° .

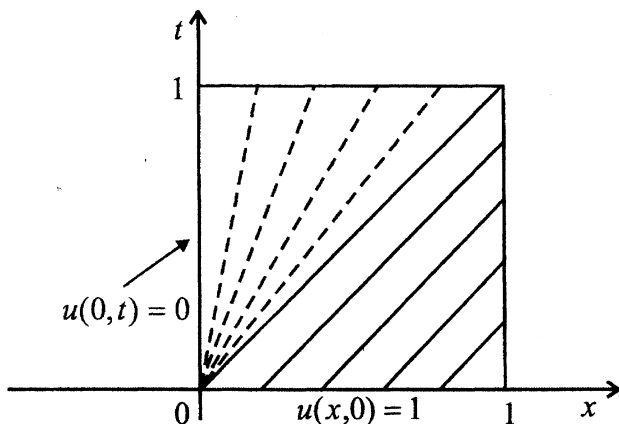


Рис. 4

Возникновение разрыва при гладких начальных данных

Найти решение начально-краевой задачи

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = -3x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(1, t) = -2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Структура решения данной задачи приведена на рис. 5. В треугольнике CAB в соответствии с (3) точное решение есть

$$u(x, t) = \frac{1 - 3x}{1 - 3t}.$$

В точке A с координатами $x = 1/3$, $t = 1/3$ характеристики впервые пересекаются и зарождается разрыв, траектория $x = X(t)$ которого определяется из уравнения (6):

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{1}{2}.$$

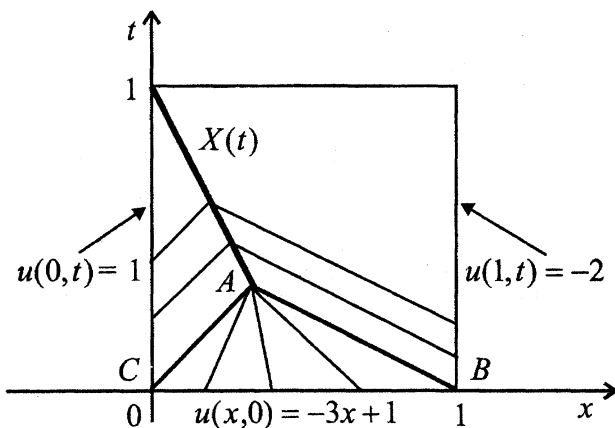


Рис. 5

Глава 2. Разностные схемы

В предыдущей главе было рассмотрено уравнение Бюргера, для которого удастся найти точное решение. Такую ситуацию, однако, следует считать редкой, так как для большинства дифференциальных уравнений точное решение найти невозможно. Поэтому широкое распространение получили различные методы численного решения дифференциальных уравнений. Численный метод состоит в переходе от искомого решения к некоторой искомой таблице чисел и к указанию последовательности арифметических действий для их вычисления. Ниже излагаются основные понятия одного из наиболее универсальных методов решения дифференциальных уравнений — метода конечных разностей.

§1. Понятие разностной схемы

Построение разностной схемы рассмотрим на примере задачи Коши для линейного уравнения переноса

$$\begin{aligned}u_t + au_x &= f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.\end{aligned}\quad (7)$$

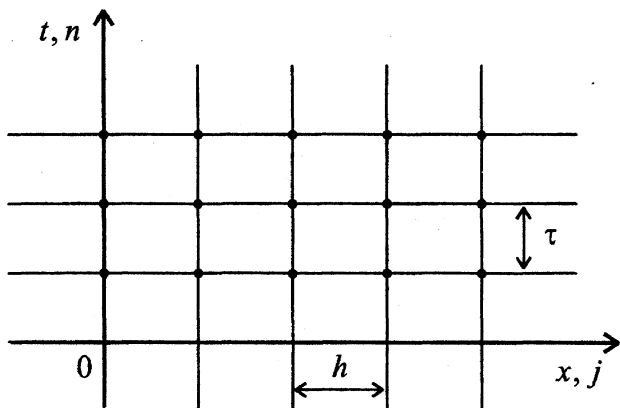


Рис. 6

Прежде всего заменим область непрерывного изменения аргументов x и t расчетной сеткой (рис. 6), т. е. дискретным множеством точек, образованных пересечениями координатных линий

$$\begin{aligned}t &= t^n = n\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots, [T/\tau]) \text{ и} \\x &= x_j = jh \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),\end{aligned}$$

где τ — шаг сетки по t , а h — шаг сетки по x . Точки построенного множества называются узлами сетки. В системе координат xOt узлы сетки имеют координаты (x_j, t^n) , а в системе целочисленной нумерации слов сетки — координаты (j, n) . Вместо функций $u(x, t)$, $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ будем рассматривать сеточные функции u_j^n , f_j^n и φ_j . Областью определения сеточных функций является множество узлов сетки.

Обозначим через ω_h сетку, соответствующую конкретным значениям шагов τ и h , а через u_h , f_h и φ_h — сеточные функции u_j^n , f_j^n и φ_j ,

определенные на сетке ω_h . Сеточные функции u_h, f_h, φ_h будем рассматривать как элементы линейных нормированных пространств функций U_h, F_h, Φ_h . Норма $\|u_h\|_{U_h}$ сеточной функции $u_h \in U_h$ есть неотрицательное число, которое принимается за меру отклонения функции u_h от тождественно нулевой сеточной функции. Норма может быть определена различными способами, например:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{j,n} |u_j^n|$$

или

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_n \sqrt{h \sum_j |u_j^n|^2}.$$

Возможны и другие определения нормы. Всякая норма есть обобщение понятия абсолютной величины числа и должна удовлетворять соотношениям

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|,$$

где α — число.

Обозначим через $(u)_h$ сеточную функцию, значения которой в узлах сетки ω_h равны значениям решения $u(x, t)$ дифференциальной задачи (7). Наша цель — найти сеточную функцию u_h , как можно точнее совпадающую с искомым решением $(u)_h$. Для этого в каждом узле сетки (j, n) заменим частные производные, входящие в (7), разностными отношениями, а в правой части уравнения и начальном условии положим $f_h = (f)_h$ и $\varphi_h = (\varphi)_h$. В результате вместо дифференциальной задачи (7) получим разностную задачу, или разностную схему,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = f_j^n, \quad (8)$$

$$u_j^0 = \varphi_j,$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1.$$

которая представляет собой вычислительный алгоритм для получения u_j^{n+1} . Разрешим (8) относительно u_j^{n+1} :

$$u_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) u_j^n + a \frac{\tau}{h} u_{j-1}^n + \tau f_j^n. \quad (9)$$

Если величины u_j^n для некоторого n -го слоя точек известны, то формула (9) позволяет вычислить их для следующего $(n+1)$ -го слоя точек. Поэтому, зная u_j^0 из начального условия, мы можем последовательно найти u_j^1, u_j^2 и т. д.

Заметим, что использованный способ замены производных и функций, входящих в дифференциальное уравнение (7), конечными разностями и сеточными функциями не является единственным. Можно построить много других разностных схем, например такие:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = f_j^n, \quad (10)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = f_j^n, \quad (11)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - 0,5(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = f_j^n. \quad (12)$$

Разностную схему легче запомнить, если ее сопоставить с рисунком, на котором изображена сетка и выделены узлы, сеточная функция u_h в которых представлена в схеме при фиксированных j и n . Совокупность таких узлов называется *шаблоном схемы*. Шаблоны четырех рассмотренных схем показаны на рис. 7.

Теперь необходимо выяснить основной вопрос любого приближенного метода — будут ли полученные по разностным схемам (8), (10) – (12) решения u_h близки к точному решению исходной задачи $(u)_h$.

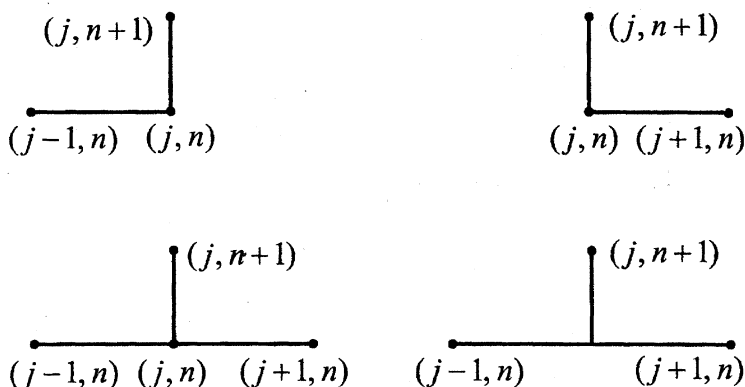


Рис. 7

§2. Сходимость

Дифференциальную задачу запишем в виде символического равенства

$$Lu = f, \quad (13)$$

где L — заданный дифференциальный оператор, а f — заданная правая часть. Например, задача (7) может быть представлена в виде (13), если положить

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t + au_x, & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

$$f \equiv \begin{cases} f(x, t) & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\ \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Пусть для приближенного решения дифференциальной начальной задачи (13), т. е. для вычисления сеточных функций u_h , построена некоторая разностная схема, которую будем символически записывать аналогично уравнению (13) в форме равенства:

$$L_h u_h = f_h. \quad (14)$$

Примером могут служить схемы (8), (10) – (12) для дифференциальной задачи (7). Для записи схемы (8) в форме (14) можно положить

$$L_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ u_j^0, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1,$$

$$f_h \equiv \begin{cases} f_j^n, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \varphi_j, & j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1,$$

Будем предполагать, что при любых рассматриваемых τ и h существует решение u_h задачи (14), принадлежащее пространству U_h . Тогда естественно потребовать, чтобы при стремлении шагов сетки τ и h к нулю решение u_h разностной задачи (14) приближалось к решению дифференциальной задачи (13). Только в этом случае мы сможем находить приближенное решение с любой наперед заданной точностью. Символически стремление всех шагов сетки к нулю обозначим через $h \rightarrow 0$. Тогда будем говорить, что *решение u_h разностной задачи при измельчении сетки сходится к решению дифференциальной задачи*, если

$$\|(u)_h - u_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В этом случае также говорят, что *схема сходится*.

Если, сверх того, выполнено неравенство

$$\|(u)_h - u_h\|_{U_h} \leq c_1 \tau^p + c_2 h^k,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $p > 0$ и $k > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от τ и h , то будем говорить, что имеет место *сходимость порядка $\mathcal{O}(\tau^p + h^k)$* или что *разностная схема имеет p -й порядок точности по τ и k -й — по h* .

Таким образом, из всевозможных разностных схем, которые могут быть построены для дифференциальной задачи, мы можем использовать для нахождения приближенного решения только сходящиеся. Как определить, является ли схема сходящейся? Разобьем этот трудный вопрос проверки

сходимости разностной схемы на два более простых: проверку аппроксимации задачи (13) задачей (14) и проверку устойчивости задачи (14).

§3. Аппроксимация

Будем считать, что правые части скалярных уравнений, которые в совокупности записаны символическим равенством (14), являются компонентами вектора f_h из некоторого линейного нормированного пространства F_h . Тогда L_h можно считать оператором, ставящим в соответствие каждой сеточной функции u_h из U_h некоторый элемент f_h из F_h .

Действуя оператором L_h на сеточную функцию $(u)_h$ из U_h , получим выражение $L_h(u)_h$, являющееся элементом пространства F_h . Невязка δf_h , возникающая при подстановке решения u дифференциальной задачи (13) в разностную схему (14)

$$L_h(u)_h = f_h + \delta f_h,$$

тоже принадлежит пространству F_h . Невязку δf_h называют *погрешностью аппроксимации*. Под величиной погрешности аппроксимации следует понимать $\|\delta f_h\|_{F_h}$.

Говорят, что разностная схема $L_h u_h = f_h$ аппроксимирует задачу $Lu = f$ на решении u , если

$$\|\delta f_h\|_{F_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Если, сверх того, имеет место неравенство

$$\|\delta f_h\|_{F_h} \leq M\tau^p + Nh^k,$$

где M , N , p и k — некоторые постоянные, то говорят, что имеет место *аппроксимация порядка $O(\tau^p + h^k)$* или что *схема аппроксимирует с порядком p по τ и с порядком k по h* .

Заметим, что приведенное определение аппроксимации задачи $Lu = f$ на решении u разностной схемой $L_h u_h = f_h$ может быть обобщено на случай произвольных функций $y(x)$, непрерывных вместе с достаточным числом своих производных [5]:

$$\begin{aligned} \|\delta f_h\|_{F_h} &= \|L_h(y)_h - f_h - (Ly - f)_h\|_{F_h} = \\ &= \|L_h(y)_h - (Ly)_h + (f)_h - f_h\|_{F_h} = O(\tau^p + h^k). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) видим, что погрешность аппроксимации разностной схемы складывается из погрешностей аппроксимации дифференциального оператора и правой части. Очевидно, аппроксимация на решении $u(x)$ имеет порядок не ниже, чем на произвольной достаточно гладкой функции.

Аппроксимация вида (15), погрешность которой стремится к нулю при любом законе стремления шагов τ и h к нулю, называется *безусловной* или *абсолютной*. Если же погрешность аппроксимации стремится к нулю при одних законах убывания шагов сетки, но не стремится к нулю при других, то аппроксимация называется *условной*. Например, если

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = O\left(\tau^p + h^k + \frac{\tau^r}{h^s}\right),$$

то аппроксимация условная, так как помимо $\tau, h \rightarrow 0$ надо дополнительно потребовать, чтобы $\tau^r/h^s \rightarrow 0$.

На практике аппроксимация задачи (13) схемой (14) проверяется достаточно просто. Проиллюстрируем это на примере схемы (8) для задачи (7). Во-первых, заметим, что начальные условия аппроксимируются точно и, следовательно, общий порядок аппроксимации схемы определяется погрешностью аппроксимации уравнения. Погрешность аппроксимации уравнения оценим локально в одном из узлов шаблона, а именно в узле (n, j) .

По определению имеем

$$\begin{aligned} (\delta f_h)_j^n &= (L_h(u)_h - f_h)_j^n = \\ &= \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\tau} + a \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{h} - f(x_j, t^n). \end{aligned}$$

Для оценки величины $(\delta f_h)_j^n$ представим сеточные функции, входящие в δf_h , через их значения в узле (n, j) с помощью формулы Тейлора (индексы опускаем, подразумевая, что все функции и их производные отнесены к указанному узлу):

$$\begin{aligned} \delta f_h &= \frac{u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3) - u}{\tau} + \\ &+ a \frac{u - \left(u - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + O(h^3) \right)}{h} - f = \\ &= u_t + au_x - f + \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{h}{2} u_{xx} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Выбрав в качестве нормы в пространстве F_h величину

$$\|f_h\| = \max \left\{ \max_j |\varphi_j|, \max_{n,j} |f_j^n| \right\},$$

получаем

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = O(\tau + h).$$

Таким образом, на достаточно гладком решении u дифференциальной задачи (7) схема (8) имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h)$. Легко показать, что такой же порядок будет и на произвольной гладкой функции $y(x)$.

§4. Устойчивость

Разностная схема $L_h u_h = f_h$ называется устойчивой, если она имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от входных данных f_h , и эта зависимость является равномерной относительно шагов сетки. Иными словами, для любого $\gamma > 0$ найдется такое $\delta(\gamma)$, не зависящее от шагов сетки τ и h (по крайней мере для достаточно малых τ и h), что при любом $\varepsilon_h \in F_h$, таком что

$$\|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq \delta,$$

разностная задача

$$L_h z_h = f_h + \varepsilon_h,$$

полученная из исходной разностной схемы добавлением к правой части возмущения ε_h , имеет единственное решение z_h , такое что

$$\|z_h - u_h\|_{U_h} \leq \gamma.$$

Из данного определения следует, что, по крайней мере для достаточно малых τ и h , если

$$\|\varepsilon_h\|_{F_h} \rightarrow 0,$$

то и

$$\|z_h - u_h\|_{U_h} \rightarrow 0$$

равномерно по τ и h .

Следуя [1], сделаем определение устойчивости разностной схемы более жестким. Конкретизируем закон стремления погрешности, вызванной возмущением входных данных схемы ε_h , потребовав

$$\|z_h - u_h\|_{U_h} \leq C \|\varepsilon_h\|_{F_h},$$

где $C > 0$ — константа, не зависящая от h .

Для линейных схем данное требование справедливо в силу линейной зависимости решения от входных данных. В случае нелинейных разностных схем оно позволит в дальнейшем установить зависимость между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью.

Сформулируем теперь окончательно два определения устойчивости, с которыми будем работать: одно для нелинейной схемы, второе — для линейной.

Определение 1. Разностная схема $L_h u_h = f_h$ устойчива, если существуют числа τ_0 , h_0 и $\delta > 0$ такие, что при любых $\tau < \tau_0$, $h < h_0$ и любом $\varepsilon_h \in F_h$ и таком, что

$$\|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq \delta,$$

разностная задача

$$L_h z_h = f_h + \varepsilon_h$$

имеет единственное решение z_h , удовлетворяющее неравенству

$$\|z_h - u_h\|_{U_h} \leq C \|\varepsilon_h\|_{F_h},$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от τ и h .

Определение 2. Разностная схема $L_h u_h = f_h$ с линейным оператором L_h устойчива, если при любом $f_h \in F_h$ уравнение $L_h u_h = f_h$ имеет единственное решение $u_h \in U_h$, такое что

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h},$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от τ и h .

Оба определения устойчивости равносильны в случае линейного оператора [1].

На практике проверка устойчивости разностной схемы осуществляется значительно сложнее, нежели проверка ее аппроксимации. Показать устойчивость схемы, исходя из определения, удается, как правило, только в простейших случаях. Например, рассмотрим схему (8)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = f_j^n,$$

$$u_j^0 = \varphi_j$$

для задачи (7), полагая, что $a > 0$.

Внесем возмущения в правую часть и начальные данные:

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} + a \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{h} = f_j^n + \varepsilon_j^n,$$

$$z_j^0 = \varphi_j + \psi_j.$$

Вычитая из последней системы уравнений исходные, приходим к разностным уравнениям, которые описывают поведение возмущений решения разностной схемы

$$\delta u_j^n = z_j^n - u_j^n,$$

вызванных возмущением входных данных:

$$\frac{\delta u_j^{n+1} - \delta u_j^n}{\tau} + a \frac{\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n}{h} = \varepsilon_j^n, \quad (16)$$

$$\delta u_j^0 = \psi_j.$$

Из (16) получаем

$$\delta u_j^{n+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) \delta u_j^n + a \frac{\tau}{h} \delta u_{j-1}^n + \tau \varepsilon_j^n,$$

$$\delta u_j^0 = \psi_j,$$

откуда при условии, что

$$0 < a \frac{\tau}{h} \leq 1, \quad (17)$$

следует неравенство

$$\left| \delta u_j^{n+1} \right| \leq \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) \left| \delta u_j^n \right| + a \frac{\tau}{h} \left| \delta u_{j-1}^n \right| + \tau \left| \varepsilon_j^n \right|,$$

$$\left| \delta u_j^0 \right| = \left| \psi_j \right|.$$

Учитывая (17), его можно усилить:

$$\left| \delta u_j^{n+1} \right| \leq \max \left[\left| \delta u_{j-1}^n \right|, \left| \delta u_j^n \right| \right] + \tau \left| \varepsilon_j^n \right|. \quad (18)$$

Для сеточной функции $y_j^n \in U_h$ на слое введем норму

$$\|y^n\| = \max_j |y_j^n|.$$

Тогда из (18) следует оценка для возмущения на $(n+1)$ -м шаге по времени:

$$\|\delta u^{n+1}\| \leq \|\delta u^n\| + \tau \|\varepsilon^n\|,$$

которая дает

$$\|\delta u^n\| \leq \|\delta u^0\| + n\tau \max_n \|\varepsilon^n\|. \quad (19)$$

Решение задачи (7) рассматривается в конечном интервале по времени,

$$0 \leq t \leq T,$$

поэтому из (19) следует

$$\|\delta u^n\| \leq (1 + T) \max \left[\|\delta u^0\|, \max_n \|\varepsilon^n\| \right].$$

Если ввести нормы

$$\|y_h\|_{U_h} = \max_{j,n} |y_j^n|,$$

$$\|\varepsilon_h\|_{F_h} = \max \left[\max_j |\psi_j|, \max_{j,n} |\varepsilon_j^n| \right],$$

то последнее неравенство принимает вид

$$\|z_h - u_h\|_{U_h} \leq C \|\varepsilon_h\|, \quad (20)$$

где $C = 1 + T$ — константа, не зависящая от τ и h . В силу однозначной разрешимости системы разностных уравнений (8) и оценки (20) из определения устойчивости (*Определение 1*) следует устойчивость схемы (8) по начальным данным и правым частям при выполнении условия $a\tau/h \leq 1$. В этом случае говорят, что схема *условно устойчива*.

Как было отмечено выше, показать устойчивость схемы, исходя из определения устойчивости, удастся редко. Поэтому на практике обычно проверяются некоторые условия, которые являются, как правило, необходимыми признаками устойчивости схемы. Познакомимся с одним из таких признаков.

Необходимый спектральный признак устойчивости

Полученное нами для схемы (8) общее условие устойчивости (20) в силу линейности схемы эквивалентно условию

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}.$$

Учитывая выражения для используемых здесь норм в пространствах U_h и F_h , запишем его в виде

$$\max_j |u_j^n| \leq C \max \left[\max_j |\varphi_j|, \max_{j,k} |f_j^k| \right], \quad (21)$$

$$n = 0, 1, \dots, [T/\tau].$$

Условие (21) должно выполняться для произвольных $\{\varphi_j\}$ и $\{f_j^k\}$. В частности, для устойчивости необходимо, чтобы оно выполнялось при $f_j^k \equiv 0$, т. е. чтобы решение задачи

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1, \quad (22)$$

$$u_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

удовлетворяло условию

$$\max_j |u_j^n| \leq C \max_j |u_j^0|, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau] \quad (23)$$

при произвольной ограниченной функции $u_j^0 = \varphi_j$.

Свойство (23), необходимое для устойчивости (21) задачи (8), называют *устойчивостью задачи (8) по начальным данным*. Оно означает, что возмущение, внесенное в начальные данные $\{u_j^0\}$, вызовет возмущение решения задачи (8) $\{u_j^n\}$, которое не более чем в C раз превосходит возмущение начальных данных, причем C не зависит от τ и h .

Для устойчивости задачи Коши (8) по начальным данным необходимо, чтобы условие (23) выполнялось, в частности, если $\{u_j^0\}$ есть какая-нибудь гармоника

$$u_j^0 = e^{i\omega j h}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \quad (24)$$

где ω — вещественный параметр (волновое число). Решение задачи (22) при начальном условии (24) имеет вид

$$u_j^n = \lambda^n e^{i\omega j h}, \quad (25)$$

где $\lambda = \lambda(\omega h)$ определяется путем подстановки выражения (25) в однородное разностное уравнение (22).

Для решения (25) справедливо равенство

$$\max_j |u_j^n| = |\lambda(\omega h)|^n \max_j |u_j^0|.$$

Поэтому для выполнения условия (23) необходимо, чтобы при всех вещественных ω выполнялось неравенство

$$|\lambda(\omega h)|^n \leq C, \quad n = 0, 1, \dots, [T/\tau]. \quad (26)$$

Теорема. Условие (26) выполняется тогда и только тогда, когда

$$|\lambda(\omega h)| \leq 1 + C_1 \tau, \quad (27)$$

где C_1 — некоторая постоянная, не зависящая от ω и τ .

Доказательство. Считаем, что $C > 1$, $C_1 > 0$ (остальные случаи очевидны). Докажем сначала, что условие (27) достаточно для выполнения неравенства (26). Из (27) следует

$$|\lambda(\omega h)|^n \leq (1 + C_1 \tau)^n \leq \left(1 + C_1 \tau + \frac{(C_1 \tau)^2}{2!} + \frac{(C_1 \tau)^3}{3!} + \dots \right)^n = e^{C_1 \tau n} \leq e^{C_1 T} = C.$$

Теперь докажем необходимость условия (27) для выполнения (26). Из (26) при $n = N = \lceil T/\tau \rceil$ следует

$$|\lambda(\omega h)|^N \leq 1 + C \leq 1 + 2N \frac{C}{T} \tau \leq \left(1 + 2 \frac{C}{T} \tau \right)^N,$$

откуда

$$|\lambda(\omega h)| \leq 1 + 2 \frac{C}{T} \tau = 1 + C_1 \tau.$$

Теорема доказана.

Условие (27) называют необходимым спектральным признаком устойчивости Неймана. Спектральным оно называется потому, что гармоника $\{e^{i\omega j h}\}$ является собственной функцией оператора перехода от слоя к слою

$$(R_h u^n)_j = \left(1 - a \frac{\tau}{h} \right) u_j^n + a \frac{\tau}{h} u_{j-1}^n,$$

который в силу разностного уравнения (8) ставит в соответствие сеточной функции $\{u_j^n\}$, определенной на слое $t^n = n\tau$, сеточную функцию $\{u_j^{n+1}\}$, определенную на слое $t^{n+1} = (n+1)\tau$:

$$u^{n+1} = R_h u^n + \tau f^n.$$

Число $\lambda(\omega h)$ является собственным числом оператора перехода, соответствующим гармонике $\{e^{i\omega j h}\}$.

Необходимое условие устойчивости (27) можно сформулировать так: спектр оператора перехода от слоя к слою разностной схемы должен ле-

жать в круге радиуса $1 + C_1\tau$ на комплексной плоскости. Из выполнения условия (27) следует, что

$$\max_j |u_j^n| = |\lambda(\omega h)|^n \max_j |u_j^0| \leq e^{C_1 T} \max_j |u_j^0|,$$

где величина $e^{C_1 T}$ хоть и является конечной, но может быть довольно большой. Поэтому часто вместо (27) рассматривают более сильное условие

$$|\lambda(\omega h)| \leq 1.$$

Для задачи (22) собственное число оператора перехода есть

$$\lambda(\omega h) = 1 - a \frac{\tau}{h} + a \frac{\tau}{h} e^{-i\omega h},$$

т. е. спектр лежит в окружности (в комплексной плоскости) радиуса $|a\tau/h|$ с центром в точке $1 - a\tau/h$. Легко убедиться, что $|\lambda| \leq 1$ лишь в случае выполнения неравенства

$$a \frac{\tau}{h} \leq 1,$$

которое совпадает с достаточным условием устойчивости схемы (8), полученным выше.

§5. Зависимость между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Пусть разностная схема $L_h u_h = f_h$ аппроксимирует дифференциальную задачу $Lu = f$ на решении u с порядком $O(\tau^p + h^k)$ и устойчива в смысле *Определения 1*. Тогда решение u_h разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи u , причем имеет место оценка

$$\|(u)_h - u_h\| = O(\tau^p + h^k).$$

Выше мы показали, что схема (8) аппроксимирует задачу (7) с порядком $O(\tau + h)$ и устойчива при $a\tau/h \leq 1$. Следовательно, в силу последней теоремы схема (8) сходится с первым порядком по τ и h .

§6. Консервативность

Как мы установили в гл. 1, §2, в решении задачи Коши

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty\end{aligned}\quad (28)$$

с течением времени могут возникнуть разрывы, даже при гладких начальных данных. Закономерным, следовательно, является вопрос о сходимости разностной схемы, применяемой для описания разрывных решений. Отсутствие аппроксимации в точках разрыва не позволяет сделать вывод о сходимости, основываясь на аппроксимации и устойчивости схемы. Если же путем непосредственных расчетов мы убедимся, что при уменьшении шагов сетки решение стремится к какой-то предельной функции, то и этого будет недостаточно, так как полученная предельная функция может оказаться несовпадающей с точным решением исходной задачи. Примеры разностных схем, которые сходятся, но не к точному решению, на самом деле существуют. Наибольшее расхождение с точным решением проявляется чаще всего в том, что в расчете неверно находятся значения функции на разрыве и скорость его перемещения.

Размышляя над тем, почему некоторые схемы неверно описывают разрывные решения и как построить схему, пригодную для расчета не только гладких, но и разрывных решений, обратим внимание на то, что от схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение, вряд ли следует ожидать блестящих результатов в случае, когда точное решение задачи имеет разрыв, поскольку для разрывного решения сами дифференциальные уравнения теряют смысл. А не воспользоваться ли для построения разностных схем интегральным уравнением? Вспомните, ведь условие на разрыве мы получили именно из интегрального уравнения.

Начнем с того, что запишем уравнение (28) в дивергентной форме

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0. \quad (29)$$

Проинтегрируем уравнение (29) по произвольной области ω в плоскости x, t :

$$\int_{\omega} \left(u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \right) d\omega = 0. \quad (30)$$

Если область ω имеет кусочно-гладкую границу Γ , а функции u и $\frac{1}{2}u^2$ непрерывно дифференцируемы, то по формуле Остроградского – Гаусса из (30) следует

$$\int_{\Gamma} \left(u \cdot n_t + \frac{1}{2} u^2 \cdot n_x \right) d\Gamma = 0, \quad (31)$$

где n_x, n_t — компоненты внешней единичной нормали к Γ . В отличие от (28), уравнение (31) допускает разрывные решения. Уравнение (31) и будем решать численно с помощью аппроксимации его разностной схемой. Попутно заметим, что условие на разрыве ранее было получено из уравнения, которое отличается от (31). Обращаясь снова к рис. 2, гл.1, и учитывая, что вектор нормали к кривой, заданной уравнением $x = X(t)$, имеет компо-

ненты $1, -\frac{dX}{dt}$, убеждаемся, что из уравнения (31) следует соотношение

$$\left[u \cdot \left(-\frac{dX}{dt} \right) + \frac{1}{2} u^2 \cdot 1 \right] = 0, \quad \text{или} \quad [u] \frac{dX}{dt} - \left[\frac{u^2}{2} \right] = 0,$$

совпадающее с тем, что было получено ранее.

Итак, построим дискретный аналог интегрального соотношения (31), причем — и это подчеркнем особо — потребуем, чтобы дискретный аналог выполнялся для любого замкнутого контура в сеточной области — подобно тому, как соотношение (31) должно выполняться для произвольного замкнутого контура в плоскости x, t . Рассмотрим ячейку $ABCD$ на рис. 8 и запишем для нее соотношение (31), учитывая, что вектор нормали к стороне AB равен $(-1, 0)$, к стороне BC — $(0, 1)$ и т. д.

$$-\int_{AB} \frac{1}{2} u^2 dt + \int_{BC} u dx + \int_{DC} \frac{1}{2} u^2 dt - \int_{AD} u dx = 0. \quad (32)$$

Для перехода к дискретному аналогу достаточно интегралы, входящие в уравнение (32), найти по каким-либо приближенным формулам, используя значения сеточной функции u_j^n из одного или нескольких узлов сетки.

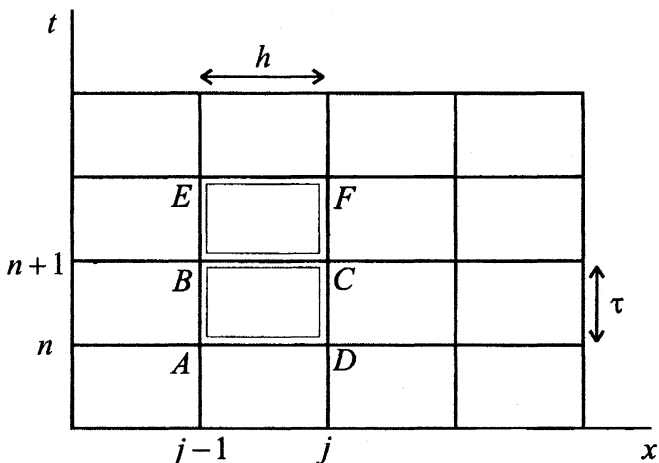


Рис. 8

Если, например, на всех гранях ячейки $ABCD$ применить формулу прямоугольников

$$\int_{AB} \frac{1}{2} u^2 dt \approx \tau \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_{j-1}^n, \quad \int_{DC} \frac{1}{2} u^2 dt \approx \tau \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_j^n,$$

$$\int_{BC} u dx \approx hu_j^{n+1}, \quad \int_{AD} u dx \approx hu_j^n,$$

то из (32) получится следующее соотношение:

$$-\tau \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_{j-1}^n + hu_j^{n+1} + \tau \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_j^n - hu_j^n = 0,$$

или

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{(u^2)_j^n - (u^2)_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (33)$$

Если при вычислении интегралов в (32) на всех гранях ячейки $ABCD$ применить формулу трапеций

$$\int_{AB} \frac{1}{2} u^2 dt \approx \frac{\tau}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_{j-1}^n + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_{j-1}^{n+1} \right\} \text{ и т. д.,}$$

то это приведет нас к следующей конечно-разностной схеме:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(u^2)_j^{n+1} - (u^2)_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{1}{2} \frac{(u^2)_j^n - (u^2)_{j-1}^n}{h} \right\} = 0. \quad (34)$$

Схема (34) имеет более высокий порядок аппроксимации, чем схема (33), что неудивительно, так как для получения (34) использовались более точные формулы численного интегрирования.

Как же обеспечить выполнение разностного аналога соотношения (31) для произвольного замкнутого контура в сеточной области? Очевидно, для этого достаточно, чтобы для соседних ячеек сетки интеграл по разделяющей их грани аппроксимировался одинаковыми формулами. Например, если при аппроксимации (31) для ячеек $BEFC$ и $ABCD$, рис. 8, интеграл по BC вычислять по одной и той же формуле, то из выполнения разностных аналогов (31) для ячеек $BEFC$ и $ABCD$ простым суммированием будет следовать точное выполнение разностного аналога (31) для контура $ABEFCDA$. (При суммировании интегралы по BC сократятся, так как внешняя по отношению к ячейке $BEFC$ нормаль к BC только знаком отличается от внешней по отношению к ячейке $ABCD$ нормали к BC .)

Разностную схему, для которой разностный аналог интегрального соотношения (31) для произвольного замкнутого контура в сеточной области есть точное следствие разностных аналогов соотношения (31) для отдельных ячеек, будем называть *консервативной*. Здесь полезно сделать замечание, касающееся дивергентной формы исходного дифференциального уравнения, взятой для построения консервативной разностной схемы. Это замечание поможет, в частности, увидеть, что построенная схема совсем не случайно получила название консервативной. Итак, заметим, что уравнение (28) может быть записано в дивергентной форме не только как (29), но и еще многими способами. Например, уравнения

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = 0 \quad \text{и} \quad (\ln u)_t + u_x = 0$$

тоже представляют собой дивергентные формы записи уравнения (28). Поскольку разным дивергентным формам соответствуют разные интегральные уравнения (из которых следуют разные соотношения на разрыве!) и разные консервативные схемы, то возникает вопрос о том, какую из этих форм принимать за “правильную”. Для уравнения (28) нам пришлось постулировать его дивергентную форму (29), никаких специальных причин для ее выбора не было.

Во многих важных случаях, к счастью, неопределенность в выборе дивергентной формы отсутствует. Так, уравнения механики сплошной среды обычно выводятся в виде интегральных законов сохранения, из которых затем получаются дифференциальные уравнения в дивергентной форме, которые тоже называются законами сохранения. Например, одномерное уравнение неразрывности, или закон сохранения массы, записывается следующим образом:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (35)$$

где ρ — плотность, u — скорость. После интегрирования уравнения (35) по прямоугольной области

$$\omega = [x_0 \leq x \leq x_J] \times [t_0 \leq t \leq t_N]$$

получаем

$$\int_{x_0}^{x_J} \left(\int_{t_0}^{t_N} (\rho_t + (\rho u)_x) dt \right) dx = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_J} (\rho^N - \rho^0) dx + \int_{t_0}^{t_N} ((\rho u)_J - (\rho u)_0) dt = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) является аналогом уравнения (31), с помощью которого мы строили консервативную схему для уравнения Бюргерса, и представляет собой физический закон сохранения: первый интеграл дает изменения массы $\int \rho dx$ за истекшее время, а второй есть разность потоков массы $\int \rho u dt$

через правую и левую границы. Разностную схему, для которой выполняется дискретный аналог интегрального закона сохранения, вполне естественно называть консервативной.

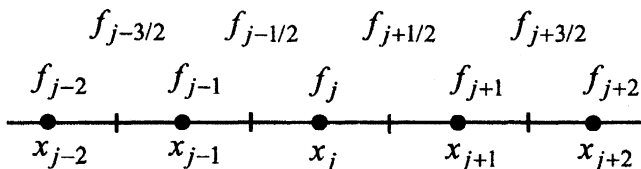


Рис. 9

Консервативные схемы могут быть получены не только из интегральных уравнений, но и непосредственно из дифференциальных уравнений в дивергентной форме

$$u_t + f_x = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) называют также дифференциальным законом сохранения или уравнением в консервативной форме. Говорят, что u в (37) является сохраняемой величиной, хотя более правильно и полезно называть ее плотностью сохраняемой величины. Когда мы записываем одно-, двух- или трехмерные уравнения газовой динамики, мы имеем дело с плотностями (на единицу длины, площади или объема) массы, импульса и энергии. Величина f имеет размерность плотности, умноженной на скорость. Она представляет собой поток (через точку, линию или поверхность) сохраняемой величины. Кроме того, она включает такие величины, как давление, которые вносят вклад в перераспределение импульса и энергии. Предположим теперь, что для одномерной задачи мы имеем данные, как изображено на рис. 9. Величины f_j считаются известными. Будем считать также, что мы умеем находить величины $f_{j+1/2}$ в полуцелых узлах $x_{j+1/2}$. Рассмотрим величину

$$\Delta m_j = -\tau(f_{j+1/2} - f_{j-1/2}),$$

которая имеет размерность плотности, умноженной на длину; в действительности, это масса (импульс или энергия), поступающие в интервал $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ за время τ . Прирост массы на всем интервале по x будет равен

$$-\tau \sum_j (f_{j+1/2} - f_{j-1/2}),$$

т. е. нулю, как это и должно быть, за исключением потоков через границу. Следовательно, система приобрела или потеряла физически правильное количество массы, а конечно-разностная схема

$$(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})(u_j^{n+1} - u_j^n) = -\tau(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n),$$

или

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n}{h} = 0 \quad (\text{при } x_{j+1} - x_j = h = \text{const}),$$

является консервативной.

Консервативность, как мы можем заключить из вышесказанного, является полезным свойством схемы. Консервативные схемы качественно похожи на исходные интегральные уравнения — они выражают законы сохранения на сетке. По сравнению с неконсервативными схемами консервативные схемы обычно приводят к существенному улучшению точности расчета как разрывных, так и гладких решений.

Существуют, однако, и другие полезные свойства, которыми желательно наделять конечно-разностную схему. Часто эти свойства противоречат друг другу, т. е. бывает трудно сделать так, чтобы схема обладала ими всеми сразу. Поэтому интересно знать, в каких случаях консервативность схемы особенно необходима и когда отсутствие консервативности не сильно вредит точности расчета.

Чтобы получить представление на этот счет, рассмотрим неконсервативную схему, полученную из уравнения в недивергентной форме:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (38)$$

Перепишем уравнение (38) следующим образом:

$$h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\tau}{2} \left\{ (u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2 + \left[(u_j^n)^2 - 2u_j^n u_{j-1}^n + (u_{j-1}^n)^2 \right] \right\} = 0,$$

после чего, введя обозначение

$$f_{j+1/2}^n = \frac{(u_j^n)^2}{2},$$

получим

$$h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \tau(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) + \frac{\tau}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)^2 = 0. \quad (39)$$

Просуммируем уравнение (39) по всем ячейкам расчетной области, наблюдая при этом только за подчеркнутым слагаемым, поскольку именно оно делает схему неконсервативной:

$$R = \frac{\tau}{2} \sum_{j,n} (u_j^n - u_{j-1}^n)^2 = \frac{h}{2} \sum_{j,n} \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right)^2 h\tau \approx \frac{h}{2} \int_{\omega} (u_x)^2 dx dt. \quad (40)$$

Из (40) видно, что в случае гладкого решения, когда производная $|u_x|$ ограничена некоторой константой C

$$|u_x| \leq C,$$

ошибка R , с которой выполняется закон сохранения, невелика:

$$R = O(h).$$

Если же в решении есть разрыв, то нарушение исходного закона сохранения становится значительным и расчет по неконсервативной схеме приводит к большим ошибкам.

§7. Численная диссипация и дисперсия

В этом параграфе мы познакомимся с диссипацией и дисперсией — свойствами разностных схем, которые особенно сильно проявляются при расчете разрывных решений. Для этого наряду с уравнением переноса

$$u_t + au_x = 0 \quad (41)$$

рассмотрим еще два уравнения:

$$u_t + au_x - \mu u_{xx} = 0, \quad (42)$$

$$u_t + au_x + \nu u_{xxx} = 0. \quad (43)$$

Предположим, что решение каждого из уравнений (41) – (43) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_m b_m e^{-p_m t} e^{im(x - q_m t)}. \quad (44)$$

Так как уравнения линейны, то поведение каждой гармоники в (44) можно рассматривать независимо. Решение, задаваемое гармоникой

$$u_m(x, t) = e^{-p_m t} e^{im(x - q_m t)}, \quad (45)$$

описывает движение плоской волны с диссипацией и дисперсией [7]. В (45) величина p_m определяет скорость затухания амплитуды волны, q_m —

скорость распространения волны; m — волновое число, связанное с длиной волны соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{m}.$$

Если движение волны (45) описывается уравнением (41), то

$$p_m = 0, \quad q_m = a,$$

т. е. волны любой длины распространяются с постоянной скоростью a и не затухают.

Для волн, описываемых уравнением (42), параметры волны (45) принимают вид

$$p_m = \mu m^2, \quad q_m = a,$$

т. е. диссипативный член в уравнении (42) определяет затухание амплитуды волны — ее диссипацию. Скорость распространения волны постоянна. Поскольку $m = 2\pi/\lambda$, то короткие волны затухают быстрее, чем длинные.

Для волн, описываемых уравнением (43), имеем

$$p_m = 0, \quad q_m = a - \nu m^2,$$

т. е. амплитуда волны не меняется, а скорость ее распространения зависит от длины волны. Если имеются волны разной длины, то они распространяются с различными скоростями — диспергируют. Более значительным изменениям подвергается скорость распространения коротковолновых возмущений (большие m). Так, если ν положительна, то короткие волны движутся намного медленнее.

Как поведут себя решения уравнений (42) и (43) соответственно, если начальные данные имеют вид ступеньки, как на рис. 10а? Разложение ступенькообразной функции в ряд Фурье содержит широкий набор гармоник. Поэтому решение уравнения (42), в котором короткие волны сильно затухают с течением времени, имеет вид размазанной ступеньки, как на рис. 10б. Решение уравнения (43), в котором волны разной длины движутся с разными скоростями, имеет немонотонный характер, осциллирует, как на рис. 10в.

Вернемся теперь к численному решению задачи Коши для уравнения (41). Точное ее решение представляет собой начальный профиль, перемещающийся со скоростью a . В качестве начального профиля снова возьмем ступеньку и проведем расчет по разностной схеме

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (46)$$

имеющей погрешность аппроксимации $O(\tau + h)$ и устойчивой при

$$r = a \frac{\tau}{h} \leq 1.$$

Результат, который мы получим, будет качественно похож на то, что изображено на рис. 10б.

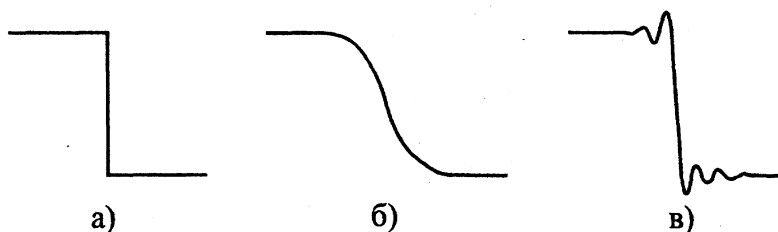


Рис. 10

Возникает вопрос: почему применение схемы (46) для решения уравнения (41) дает результат, напоминающий решение другого дифференциального уравнения, а именно уравнения (42)? Понять причину нам поможет исследование дифференциального приближения разностной схемы (46).

Подставим в (46) достаточно гладкую функцию $(u)_h$ и, выразив u_j^{n+1} и u_{j-1}^n через значения самой функции и ее производных в точке (j, n) по формуле Тейлора, получим

$$u_t + au_x = -\frac{\tau}{2} u_{tt} + a \frac{h}{2} u_{xx} - \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - a \frac{h^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (47)$$

В левой части (47) записано исходное уравнение переноса, а в правой — погрешность аппроксимации. Значение членов, входящих в погрешность аппроксимации, можно лучше понять, если производные по времени заменить производными по пространству. Для этого подействуем на обе части

уравнения (47) оператором $\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}$. В результате получим выражение

для u_{tt}

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \left(-\frac{1}{2} u_{ttt} + \frac{a}{2} u_{ttx} + O(\tau) \right) +$$

$$+ h \left(\frac{a}{2} u_{txx} - \frac{a^2}{2} u_{xxx} + O(h) \right). \quad (48)$$

Аналогично можно получить выражения для производных u_{ttt} , u_{ttx} , u_{xtt} :

$$\begin{aligned} u_{ttt} &= -a^3 u_{xxx} + O(\tau, h), \\ u_{ttx} &= a^2 u_{xxx} + O(\tau, h), \\ u_{xtt} &= -a u_{xxx} + O(\tau, h). \end{aligned} \quad (49)$$

С учетом (48) и (49) из (47) следует

$$u_t + a u_x = \frac{ah}{2} (1-r) u_{xx} - \frac{ah^2}{6} (2r^2 - 3r + 1) u_{xxx} + \dots \quad (50)$$

Уравнение (50) называют *дифференциальным представлением* [8] (или *дифференциальным приближением*, или *модифицированным уравнением* [9]) схемы (46). При использовании схемы (46) мы получаем точное решение уравнения (50), являющееся приближенным решением исходного уравнения (41). Правая часть дифференциального приближения (50) составляет погрешность аппроксимации схемы (46). Следовательно, член наименьшего порядка в правой части (50) определяет порядок аппроксимации метода. В данном случае главный член погрешности аппроксимации пропорционален производной u_{xx} , т. е. он аналогичен диссипативному вязкому члену μu_{xx} в уравнении (42). Поэтому при $r \neq 1$ схема с разностью против потока (46) неявно вводит в уравнение вязкость, которую часто называют *аппроксимационной* или *схемной* вязкостью в отличие от явной *искусственной* вязкости, которая преднамеренно вводится в исходное дифференциальное уравнение, как в (42). Наличие в уравнении диссипативного члена (аппроксимационного или искусственного) оказывает сглаживающее воздействие на решение, уменьшая его градиенты. Свойство разностной схемы, обусловленное наличием в фактически решаемом уравнении диссипативного члена, называется *диссипацией*. Схемы с противопоточными разностями первого порядка обладают свойством диссипации из-за наличия у них аппроксимационной вязкости.

Теперь для численного решения той же задачи применим схему Лакса – Вендроффа

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = a^2 \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (51)$$

которая устойчива при $|r| = \left| a \frac{\tau}{h} \right| \leq 1$ и аппроксимирует уравнение (41) с

порядком $O(\tau^2 + h^2)$. Результат расчета будет качественно совпадать с изображенным на рис. 10в. За объяснением снова обратимся к дифференциальному приближению, которое для схемы (51) имеет вид

$$u_t + au_x = -\frac{ah^2}{6}(1-r^2)u_{xxx} - \frac{ah^2}{8}r(1-r^2)u_{xxxx} + \dots$$

Главный член погрешности аппроксимации теперь пропорционален производной u_{xxx} , т. е. он аналогичен дисперсионному члену νu_{xxx} в уравнении (43). Следовательно, при $r \neq 1$ схема Лакса – Вендроффа (51) неявно вводит в уравнение дисперсию и, как мы установили выше, скорости распространения гармоник решения с разной длиной волны будут различны.

Заметим, что для задач с плавно меняющимися решениями, вклад в которые высокочастотных гармоник невелик, схема Лакса – Вендроффа второго порядка дает заметно лучшую точность, чем схема с направленными разностями первого порядка.

Таким образом, при численном решении задачи о распаде разрыва в приближении невязкого уравнения Бюргерса (41) мы сталкиваемся со следующей проблемой. Если используется схема с разностями против потока, обладающая свойством диссипации (аппроксимационной вязкостью), то численное решение ведет себя на разрыве монотонно. Однако сглаживающий эффект такой схемы может оказаться значительным, а численное решение далеким от искомого (бороться со сглаживанием путем сильного измельчения шагов сетки — дорогой способ!). Схема Лакса – Вендроффа приводит к появлению дисперсионных ошибок, которые проявляются в виде ряби в окрестности ступеньки. Проявление этого эффекта при расчете газодинамических течений с ударными волнами в приближении уравнений Эйлера (задача о распаде разрыва, решаемая в приближении невязкого уравнения Бюргерса, является модельной в этом случае) может приводить к возникновению отрицательных (физически нереальных) значений плотности и энергии. Использование других схем, имеющих порядок аппроксимации выше первого, проблему осцилляций решения на разрывах не решает. С.К.Годуновым в [10] было показано, что не существует монотонных линейных разностных схем с порядком аппроксимации по пространству выше первого. Здесь мы подошли к еще одному важному свойству разностных схем, тесно связанному со свойством диссипативности. Это свойство *монотонности схемы*.

§8. Монотонность

Решение дифференциальной задачи Коши

$$u_t + au_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad a = \text{const}, \quad (52)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

при любом фиксированном $t > 0$ будет неубывающей (невозрастающей) функцией от x , если функция $\varphi(x)$ является неубывающей (невозрастающей). (Это следует из того, что в любой момент времени решение совпадает с начальным профилем сдвинутым вдоль оси x на расстояние at .) Естественно потребовать и от решения разностной схемы, аппроксимирующей задачу (52), выполнения аналогичного свойства.

Рассмотрим явную разностную схему, аппроксимирующую задачу (52) на $(2k + 1)$ -точечном шаблоне

$$u_j^{n+1} = \sum_{i=-k}^k c_l u_{j+l}^n, \quad c_l = \text{const}, \quad (53)$$

$$u_j^0 = \varphi(x_j).$$

Ее можно записать также в операторном виде

$$u^{n+1} = R_n u^n,$$

где R_n — оператор перехода от слоя к слою.

Разностная схема (53) называется *схемой, сохраняющей монотонность*, если оператор перехода переводит монотонную сеточную функцию в монотонную с сохранением направления роста ее значений.

Верно утверждение [10]: схема (53) сохраняет монотонность тогда и только тогда, когда $c_l \geq 0$, $-k \leq l \leq k$.

Рассмотрим теперь задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения

$$u_t + f_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (54)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

и явную схему для нее на $(2k + 1)$ -точечном шаблоне, которую запишем в общем виде:

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k}^n). \quad (55)$$

Схема (55) называется *монотонной*, если функция H является монотонно неубывающей функцией каждого из своих $(2k + 1)$ аргументов. Другими словами, схема (55) монотонна, если

$$\frac{\partial H}{\partial W_l} (W_{-k}, \dots, W_k) \geq 0, \quad -k \leq l \leq k.$$

В частности, линейная схема (53) монотонна, если $c_l \geq 0$, $-k \leq l \leq k$.

В [11] доказывается, что монотонные схемы являются схемами, сохраняющими монотонность.

Верно также утверждение: не существует монотонных линейных схем с порядком аппроксимации по пространству выше первого [10].

Для уравнения $u_t + au_x = 0$, $a = \text{const} > 0$ рассмотрим схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (56)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = a^2 \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (57)$$

изученные выше в связи со свойством диссипативности. Перепишем их в виде (53):

$$u_j^{n+1} = (1 - r)u_j^n + ru_{j-1}^n, \quad (58)$$

$$u_j^{n+1} = 0,5r(r + 1)u_{j-1}^n + (1 - r^2)u_j^n + 0,5r(r - 1)u_{j+1}^n. \quad (59)$$

Как и следовало ожидать из анализа диссипативных свойств схем (56), (57), по знакам коэффициентов в (58) и (59) заключаем, что схема с противоположной разностью первого порядка (56) монотонна при выполнении условия ее устойчивости $r \leq 1$, а схема Лакса – Вендроффа (57) не монотонна, если $r \neq 1$.

В предыдущем параграфе мы пришли к выводу, что разностная схема для численного представления разрывных решений должна обладать свойством диссипативности. Однако, поскольку диссипативность нужна лишь для предотвращения нефизических осцилляций в численном решении, более точным будет напрямую потребовать от схемы, чтобы она сохраняла монотонность решения, а наделение ее свойством диссипативности — рассматривать как способ сделать схему сохраняющей монотонность.

В классе линейных схем не существует монотонных, а следовательно, и сохраняющих монотонность схем с порядком аппроксимации выше первого. Поэтому, если мы хотим построить схему порядка аппроксимации выше

первого и сохраняющую монотонность, мы вынуждены выйти из класса линейных схем и обратиться к схемам с адаптивной аппроксимацией. Среди последних даже схемы для линейных уравнений с постоянными коэффициентами являются нелинейными! Примером нелинейной схемы для уравнения (52) является схема

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a(1 - \phi) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + a\phi \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \\ = a^2 \phi \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \end{aligned} \quad (60)$$

в которой параметр ϕ зависит от сеточной функции u_j^n . Схему (60) нельзя записать в виде (53) с постоянными c_l .

Меняя значение параметра ϕ можно регулировать свойства схемы (60). Например, если $\phi = 0$, то (60) превращается в схему с противопоточной разностью первого порядка (56). Если $\phi = 1$, то (60) превращается в схему Лакса – Вендроффа (57).

Таким образом, вырисовывается следующая идея построения схемы, которая сохраняет монотонность и имеет порядок выше первого. Надо следить за решением u_j^n и в тех узлах сетки, где возникает угроза возникновения осцилляций, полагать $\phi = 0$, а там, где такой угрозы нет, полагать $\phi = 1$. Можно поступить более тонко и плавно менять параметр ϕ в зависимости от решения.

Все способы построения монотонных разностных схем сводятся, по сути, к манипуляциям с некими параметрами, которые определяют диссипативные свойства схемы, как это делает параметр ϕ в нашем примере. Проблема, однако, состоит в том, что, с одной стороны, добавленная диссипация должна быть достаточно велика, чтобы обеспечить монотонность решения, а с другой стороны, она должна быть достаточно мала, чтобы не привести к чрезмерному сглаживанию решения. В следующем параграфе вводится понятие, которое конструктивно используется для построения схем повышенного порядка, сохраняющих монотонность.

§9. Невозрастание полной вариации (TVD)

Отметим еще одно свойство решения задач (52) и (54). Для этого нам понадобится понятие полной вариации функции. Для произвольной кусочно-гладкой функции $f(x)$ с конечным числом разрывов полная вариация определяется следующим образом:

$$TV(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_x| dx + \sum_k |[f]_k|,$$

где x_k — точки разрыва функции, $[f]$ — скачок функции на разрыве (точки разрыва исключены из интегрального выражения).

Будем считать, что функция начального распределения $\varphi(x)$ имеет ограниченную полную вариацию, т. е.

$$TV(\varphi(x)) \leq C < \infty. \quad (61)$$

Для линейной задачи с постоянным коэффициентом (52), очевидно, имеет место равенство

$$TV(u(x, t)) = TV(\varphi(x)).$$

Для нелинейной задачи Коши (54) при выполнении (61) решение обладает следующими свойствами [11]:

- со временем не возникают новые локальные экстремумы по x ;
- значения локальных минимумов не уменьшаются, а локальных максимумов не увеличиваются.

Из этих свойств следует, что

$$TV(u(t_2)) \leq TV(u(t_1))$$

при любых $t_2 \geq t_1 \geq 0$.

Потребуем от разностных схем для задач (52) и (54) выполнения аналогичного свойства. Определим полную вариацию численного решения следующим образом:

$$TV_h(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_{j+1/2} u^n|,$$

где

$$\Delta_{j+1/2} u = u_{j+1} - u_j.$$

Разностную схему, решение которой u_j^n удовлетворяет условию невозрастания полной вариации

$$TV_h(u^{n+1}) \leq TV_h(u^n), \quad (62)$$

будем называть *TVD-схемой* (Total Variation Diminishing Scheme).

Теперь сформулируем в более полном виде приведенное в §8 утверждение о взаимосвязи между монотонными схемами и схемами, сохраняющими монотонность.

Теорема

- 1) Монотонная схема является TVD-схемой;
- 2) TVD-схема является схемой, сохраняющей монотонность.

Доказательство теоремы приведено в [11].

Теорема дает общую идею того, как построить разностную схему для уравнения (52) (или (54)), которая имеет высокий порядок аппроксимации и позволяет получать неосциллирующие решения. Идея состоит в том, что надо взять схему высокого порядка точности и так ее модифицировать, чтобы она стала TVD-схемой, сохранив при этом порядок аппроксимации. (TVD-схема не обязана быть монотонной и, следовательно, быть схемой первого порядка!)

Модификация обычно осуществляется с помощью следующей теоремы [11], которая дает достаточный признак того, что схема является TVD-схемой

Теорема. Разностная схема, записанная в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^+ \Delta_{j+1/2} u^n - C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} u^n, \quad (63)$$

где коэффициенты

$$C_{j+1/2}^+ = C_{j+1/2}^+(u_{j-m}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+k}^n),$$

$$C_{j-1/2}^- = C_{j-1/2}^-(u_{j-k}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+m}^n),$$

$$0 \leq m < k \quad (k \text{ — определяет шаблон схемы})$$

удовлетворяют условиям

$$C_{j+1/2}^\pm \geq 0, \quad C_{j+1/2}^+ + C_{j+1/2}^- \leq 1, \quad (64)$$

является TVD-схемой.

Доказательство. Вычитая (63) при $j = i$ от (63) при $j = i + 1$, получаем

$$\Delta_{i+1/2}u^{n+1} = C_{i-1/2}^- \Delta_{i-1/2}u^n + (1 - C_{i+1/2}^- - C_{i+1/2}^+) \Delta_{i+1/2}u^n + C_{i+3/2}^+ \Delta_{i+3/2}u^n. \quad (65)$$

Согласно (64) все коэффициенты в (65) неотрицательны, поэтому

$$\left| \Delta_{i+1/2}u^{n+1} \right| \leq (1 - C_{i+1/2}^- - C_{i+1/2}^+) \left| \Delta_{i+1/2}u^n \right| + C_{i-1/2}^- \left| \Delta_{i-1/2}u^n \right| + C_{i+1/2}^+ \left| \Delta_{i+3/2}u^n \right|. \quad (66)$$

Суммируя (66) при $-\infty < i < \infty$, получаем

$$\begin{aligned} TV_h(u^{n+1}) &\equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{j+1/2}u^{n+1} \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 - C_{j+1/2}^- - C_{j+1/2}^+) \left| \Delta_{j+1/2}u^n \right| + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j-1/2}^- \left| \Delta_{j-1/2}u^n \right| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+3/2}^+ \left| \Delta_{j+3/2}u^n \right| = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{j+1/2}u^n \right| \equiv TV_h(u^n), \end{aligned}$$

т. е. условие (62) выполняется. (Равенство получено с помощью изменения индекса суммирования в последних двух суммах в правой части неравенства.) Теорема доказана.

Ранее мы показали, что схема Лакса – Вендроффа не является монотонной и ее решение осциллирует. Построим модификацию схемы Лакса – Вендроффа, превратив ее в TVD-схему, не снижая порядка аппроксимации.

Для простоты изложения рассмотрим линейное уравнение с постоянным коэффициентом

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const} > 0.$$

Тогда схема Лакса – Вендроффа (59) может быть переписана в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r \Delta_{j-1/2}u^n - \Delta_{j-1/2} \frac{1}{2} r(1-r) \Delta_{j+1/2}u^n. \quad (67)$$

Подчеркнутый член в правой части (67) определяет отличие данной схемы от монотонной схемы с направленной против потока разностью первого порядка. Поскольку он устраняет главный диссипативный член в погрешности аппроксимации последней схемы, превращая ее в схему Лакса – Вен-

дроффа, то его называют *антидиффузионным*. Уменьшая антидиффузионный член в местах возможного появления осцилляций, можно предотвращать это вредное явление. Регулировать антидиффузионный член будем с помощью функции-ограничителя $\phi(s)$ некоторого аргумента s

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r\Delta_{j-1/2}u^n - \Delta_{j-1/2}\phi_{j+1/2} \frac{1}{2}r(1-r)\Delta_{j+1/2}u^n. \quad (68)$$

Если $\phi_{j+1/2} \equiv 0$, то (68) является противопотоковой схемой первого порядка; если $\phi_{j+1/2} \equiv 1$, то (68) — это схема Лакса – Вендроффа второго порядка. В качестве аргумента функции

$$\phi_{j+1/2} = \phi(s_{j+1/2})$$

выберем отношение

$$s_{j+1/2} = \frac{\Delta_{j-1/2}u^n}{\Delta_{j+1/2}u^n},$$

которое на осциллирующем решении u_j^n становится отрицательным.

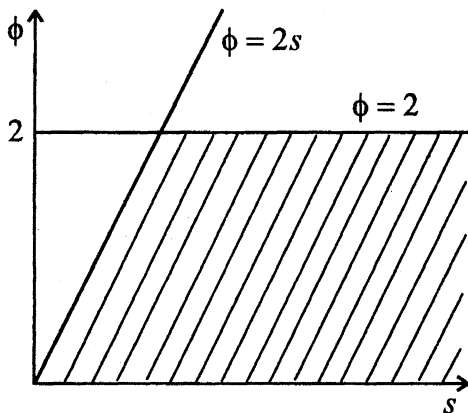


Рис. 11

Функцию-ограничитель $\phi_{j+1/2}$ надо подобрать таким образом, чтобы схема (68) удовлетворяла достаточному условию TVD (64). Перепишем (68) в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+1/2}^+ \Delta_{j+1/2} u^n - C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} u^n, \quad (69)$$

где

$$C_{j+1/2}^+ = 0, \\ C_{j-1/2}^- = r \left[1 + \frac{1}{2} (1-r) \left(\frac{\phi_{j+1/2}}{s_{j+1/2}} - \phi_{j-1/2} \right) \right].$$

Для выполнения условия

$$0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1,$$

которое гарантирует, что схема (69) при выполнении условия Куранта $\sigma\tau/h \leq 1$ будет TVD-схемой, достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leq \frac{\phi_{j+1/2}}{s_{j+1/2}} \leq 2, \quad 0 \leq \phi_{j+1/2} \leq 2. \quad (70)$$

Область в плоскости переменных ϕ и s , в которой выполняются неравенства (70), отмечена на рис. 11.

Для сохранения модифицированной схемой второго порядка аппроксимации достаточно, чтобы график функции $\phi = \phi(s)$ проходил через точку $(1, 1)$. Пусть, например, график $\phi = \phi(s)$ лежит между прямой $\phi = 1$ ($\phi \equiv 1$ соответствует схеме Лакса-Вендроффа второго порядка) и прямой $\phi = s$ ($\phi \equiv s$ соответствует схеме с направленной разностью второго порядка), рис. 12. Вот несколько функций-ограничителей, удовлетворяющих как условию TVD, так и 2-му порядку аппроксимации схемы:

$$\phi(s) = \max[0, \min(1, s)] \quad (\text{minmod}), \quad (71)$$

$$\phi(s) = \max[0, \min(2s, 1), \min(2, s)] \quad (\text{superbee}), \quad (72)$$

$$\phi(s) = \frac{|s|+s}{|s|+1} = \begin{cases} \frac{2s}{1+s}, & s > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases} \quad (\text{Van Leer}). \quad (73)$$

Ограничители (71), (72) являются членами следующего семейства:

$$\phi(s) = \max[0, \min(\alpha s, 1), \min(\alpha, s)], \quad \alpha \in [1, 2].$$

Функции-ограничители (71) – (73) изображены на рис. 13.

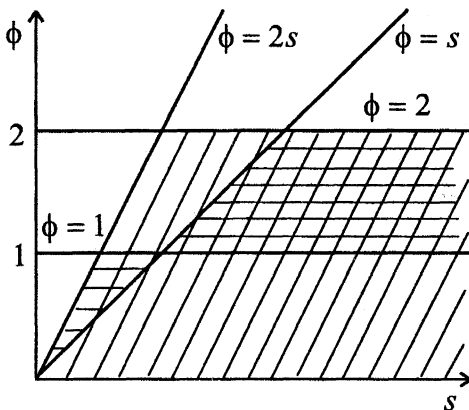


Рис. 12

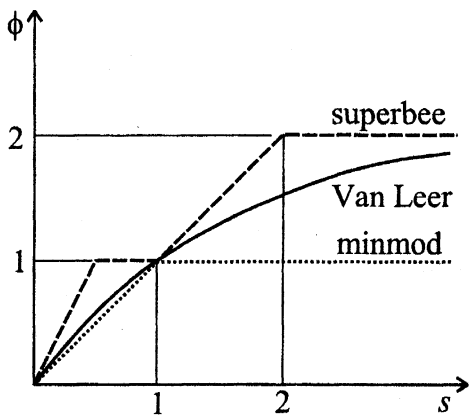


Рис. 13

Замечание. В более общем случае, когда коэффициент переноса a в уравнении переменный и может менять знак, функцию-ограничитель следует сделать зависящей от сеточной функции $\{u_j\}$ симметричным образом.

Например:

$$\phi_{j+1/2} = \phi(s_{j+1/2}^-, s_{j+1/2}^+),$$

$$s_{j+1/2}^- = \frac{\Delta_{j-1/2}u}{\Delta_{j+1/2}u}, \quad s_{j+1/2}^+ = \frac{\Delta_{j+3/2}u}{\Delta_{j+1/2}u}.$$

Приведем без выкладок TVD-модификацию схемы Лакса – Вендроффа для нелинейного уравнения:

$$u_t + f_x = 0, \quad f = f(u), \quad a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

При записи численных потоков на этот раз будем использовать не функцию-ограничитель $\phi_{j+1/2}$, а величины $\psi_{j+1/2}$ — ограниченные приращения самой искомой функции ($\psi_{j+1/2} = \phi_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} u$):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n),$$

где

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau}{h} (a_{j+1/2})^2 \psi_{j+1/2} + |a_{j+1/2}| \left(\Delta_{j+1/2} u - \psi_{j+1/2} \right) \right], \quad (74)$$

$$a_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{\Delta_{j+1/2} f}{\Delta_{j+1/2} u}, & \Delta_{j+1/2} u \neq 0, \\ a(u_j), & \Delta_{j+1/2} u = 0. \end{cases}$$

$\psi_{j+1/2}$ может выбираться различными способами, лишь бы выполнялось TVD-свойство. Например:

$$\text{а) } \psi_{j+1/2} = \min\text{mod}(\Delta_{j+1/2} u, \Delta_{j-1/2} u) + \min\text{mod}(\Delta_{j+1/2} u, \Delta_{j+3/2} u) - \Delta_{j+1/2} u,$$

$$\text{б) } \psi_{j+1/2} = \min\text{mod}(\Delta_{j-1/2} u, \Delta_{j+1/2} u, \Delta_{j+3/2} u).$$

Функция $\min\text{mod}$ равна меньшему по модулю из своих аргументов, если они одного знака, и нулю в противном случае.

Укажем еще одну важную поправку численного потока (74), которая носит название "энтропийная коррекция" [11]. Она заключается в замене в (74) модуля характеристической скорости $|a_{j+1/2}|$ функцией $g(a_{j+1/2})$

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau}{h} (a_{j+1/2})^2 \Psi_{j+1/2} + g(a_{j+1/2}) (\Delta_{j+1/2} u - \Psi_{j+1/2}) \right], \quad (75)$$

$$g(a_{j+1/2}) = \begin{cases} |a_{j+1/2}|, & |a_{j+1/2}| \geq \varepsilon, \\ \frac{a_{j+1/2}^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & |a_{j+1/2}| < \varepsilon, \end{cases}$$

$$0,01 \leq \varepsilon \leq 0,2.$$

Энтропийная коррекция исключает появление у численного решения схемных эффектов, аналогичных нефизичным скачкам разрежения в решении уравнений газовой динамики.

§10. Некоторые схемы для уравнения переноса

Здесь мы приведем ряд разностных схем, построенных в разное время для уравнений типа Бюргерса (1), записанных как в недивергентной, так и в дивергентной форме. Основные свойства приводимых схем могут быть установлены на примере простейшего линейного уравнения переноса.

10.1. Линейное уравнение переноса

Рассмотрим схемы для уравнения

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}. \quad (76)$$

Явная схема с разностями против потока

Схема имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{если } a > 0,$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad \text{если } a < 0.$$

Схема имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h)$ и устойчива при

$$|r| = |a| \frac{\tau}{h} \leq 1.$$

Схема обладает большой диссипацией и монотонна.

Явная схема с центральной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (77)$$

Схема (77) имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$, абсолютно неустойчива.

Схема Лакса

Схема (77) становится устойчивой, если в ней u_j^n заменить на выражение

$$0,5(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n).$$

В результате получим известную схему Лакса

$$\frac{u_j^{n+1} - 0,5(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

Погрешность аппроксимации схемы Лакса $O\left(\tau + h^2 + \frac{h^2}{\tau}\right)$ может не

стремиться к нулю при τ и h , стремящихся к нулю. Такие схемы называют *условно аппроксимирующими*. В данном случае аппроксимация первого порядка имеет место при $\tau/h = \text{const}$.

Неявная схема с центральной разностью

До сих пор мы рассматривали только *явные* схемы, т. е. схемы, в которых значения сеточных функций на $(n+1)$ -м слое представлены только в одном узле. Если схема содержит в каждом уравнении несколько неизвестных значений функции на новом $(n+1)$ -м слое, то она называется *неявной*. Рассмотрим простейшую неявную схему для уравнения (76)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0. \quad (78)$$

Эта схема имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$ и абсолютно устойчива. Однако при использовании этой схемы на каждом шаге по времени приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Поскольку матрица коэффициентов является трехдиагональной, то для решения применяется эффективный метод прогонки. Тем не менее приходится проводить больше вычислений, чем при использовании явных схем. Это плата за безусловную устойчивость метода. Использование слишком большого шага по времени требует осторожности, так как дифференциальное приближение схемы (78) имеет вид

$$u_t + au_x = \frac{\tau}{2} a^2 u_{xx} - \left[\frac{1}{6} ah^2 + \frac{1}{3} a^3 \tau^2 \right] u_{xxx} + \dots$$

и, следовательно, схема обладает сильной диссипацией при больших τ .

Схема с перешагиванием (схема "чехарда")

Рассмотренные выше схемы обладают первым порядком аппроксимации по t . В большинстве случаев эти схемы не используются для решения уравнений в частных производных из-за малой точности. Простейшим методом второго порядка точности по t является схема с перешагиванием

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (79)$$

Схемы, подобные (79), называют *трехслойными по времени*, так как для определения значения u на $(n+1)$ -м слое по t необходимо знать значения u на $(n-1)$ -м и n -м слоях по t . Метод (79) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и устойчив при $|r| \leq 1$. Схема обладает рядом недостатков. Прежде всего, начальные условия необходимо задавать на двух слоях по t . Для этого обычно используют двухслойную схему на первом шаге по времени. Второй недостаток схемы связан именно с "перешагиванием" (т. е. с тем, что u_j^{n+1} не зависит от u_j^n), которое приводит к появлению при расчете двух независимых решений.

Схема Лакса – Вендроффа

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = a^2 \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

Свойства этой схемы подробно исследованы в §7.

Схема Маккормака

Схема Маккормака широко применялась для решений уравнений газовой динамики до середины 80-х годов, пока не были сконструированы монотонные TVD-схемы высокого порядка аппроксимации. Схема записывается в виде двух шагов

$$\begin{aligned}\frac{\hat{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= 0, \\ \frac{\hat{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{\hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1}}{h} &= 0, \\ u_j^{n+1} &= 0.5(\hat{u}_j^n + \hat{u}_j^{n+1}).\end{aligned}$$

Для линейного уравнения переноса (76) схема Маккормака эквивалентна схеме Лакса – Вендроффа. Поэтому у них одинаковые погрешности аппроксимации, условия устойчивости и дифференциальные приближения.

Схема Кранка – Николсона

Схема имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) = 0,$$

обладает погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и абсолютно устойчива. Так же как и в случае неявной схемы с центральной разностью, при расчете по схеме Кранка – Николсона на каждом шаге по времени применяется метод прогонки, но количество вычислений увеличивается из-за необходимости представления конвективного члена на предыдущем n -м слое по времени. Это дополнительная плата за второй порядок точности схемы Кранка – Николсона.

Трехслойная неявная схема

Часто порядок аппроксимации по t повышают, используя трехточечный шаблон по времени, как это сделано, например, в следующей схеме

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0. \quad (80)$$

Схема (80) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ и абсолютно устойчива. Недостатком схемы является необходимость применения альтернативной двухслойной схемы на первом шаге по времени.

Компактная схема повышенного порядка аппроксимации

Схемы, в которых высокий порядок аппроксимации достигается не за счет расширения шаблона, а путем введения процедур усреднения разностных отношений, называются *компактными*. Представителем таких схем является схема для уравнения (76)

$$A \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) = 0, \quad (81)$$

где оператор усреднения A действует следующим образом:

$$Ay_j = \frac{1}{6} (y_{j-1} + 4y_j + y_{j+1}).$$

Схема (81) имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$ и абсолютно устойчива. На каждом шаге по времени для ее решения применяется метод прогонки.

TVD-схемы

Запишем схемы этого класса в общем виде:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n), \quad (82)$$

где $f_{j+1/2}^n$ — разностный поток, аппроксимирующий дифференциальный поток $f = au$ ($a = const$ для уравнения (76)). Тогда TVD-модификации схемы Лакса – Вендроффа, имеющей второй порядок аппроксимации, соответствует выражение для разностного потока

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) - \frac{|a|}{2} \Delta_{j+1/2} u + \frac{|a|}{2} (1 - |r|) \Delta_{j+1/2} u \phi_j, \quad r = a \frac{\tau}{h}. \quad (83)$$

Одна из возможных функций-ограничителей для (83) имеет вид

$$\phi_j(\vartheta_j) = \max \left[0, \min \left(1, \frac{\vartheta_j}{\eta} \right), \min \left(\vartheta_j, \frac{1}{\eta} \right) \right],$$

где

$$\vartheta_j = \begin{cases} \Delta_{j-1/2} u / \Delta_{j+1/2} u, & r > 0, \\ \Delta_{j+3/2} u / \Delta_{j+1/2} u, & r < 0, \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 - |r|, & 0 \leq |r| < 0,5, \\ |r|, & 0,5 \leq |r| \leq 1. \end{cases}$$

Вот еще один вариант функции-ограничителя для схемы (82), (83):

$$\phi_j(\vartheta_j) = \max \left[0, \min \left(1, \frac{2\vartheta_j}{\eta} \right), \min \left(\vartheta_j, \frac{2}{\eta} \right) \right].$$

TVD-модификация противопоточной схемы третьего порядка аппроксимации по пространству может быть получена, если в (82) положить

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) - \frac{|a|}{2} \Delta_{j+1/2} u + \left[|a| \left(\frac{1}{3} - \frac{|r|}{2} + \frac{r^2}{6} \right) \Delta_{j+1/2} u + \frac{|a|}{6} (1 - r^2) \Delta_{j+Z+1/2} u \right] \phi_j.$$

Здесь

$$Z = \begin{cases} -1, & r > 0, \\ 1, & r < 0, \end{cases}$$

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{6\vartheta_j}{\eta[\vartheta_j(1+|r|)+2-|r|]}, & 0 \leq \vartheta_j < \vartheta^L, \\ 1, & \vartheta^L \leq \vartheta_j \leq \vartheta^R, \\ \frac{6}{\eta[\vartheta_j(1+|r|)+2-|r|]}, & \vartheta_j > \vartheta^R, \\ 0, & \vartheta_j < 0, \end{cases}$$

$$g^L = \frac{\eta(2-|r|)}{6-\eta(1+|r|)}, \quad g^R = \frac{6-\eta(2-|r|)}{\eta(1+|r|)}.$$

10.2. Уравнение Бюргера в дивергентной форме

Теперь рассмотрим несколько схем для уравнения Бюргера, записанного в виде дифференциального нелинейного закона сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

не останавливаясь на их свойствах. Они аналогичны свойствам соответствующих схем, приведенных в предыдущем разделе. Схемы записываются в виде разностных законов сохранения

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n).$$

TVD-модификация схемы Лакса – Вендроффа

Вид разностного потока для этой схемы приведен в (75).

Противопоточная TVD-схема второго порядка точности по пространственной переменной

Разностный поток $f_{j+1/2}^n$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} f_{j+1/2} = & \frac{1}{2} \left[f_j + f_{j+1} - g(a_{j+1/2}) \Delta_{j+1/2} u \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\min\text{mod} \left(a_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} u, a_{j+1/2}^+ \Delta_{j+1/2} u \right) - \right. \\ & \left. - \min\text{mod} \left(a_{j+3/2}^- \Delta_{j+3/2} u, a_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$a^+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0, \\ a, & a < 0, \end{cases}$$

$a = \frac{\partial f}{\partial u}$ — характеристическая скорость.

Функция $g(a_{j+1/2})$ определена в (75).

В другом варианте этой схемы разностный поток имеет вид

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[f_j + f_{j+1} - g(a_{j+1/2}) \Delta_{j+1/2} u \right] + \\ + \frac{1}{2} a_{j+1/2} \left[\min\text{mod}(\Delta_{j-1/2} u, \Delta_{j+1/2} u) - \right. \\ \left. - \min\text{mod}(\Delta_{j+3/2} u, \Delta_{j+1/2} u) \right].$$

Глава 3. Система одномерных нестационарных уравнений газовой динамики

Теперь, после ознакомления с особенностями численного решения скалярного нестационарного нелинейного уравнения переноса, мы можем приступить к рассмотрению методов, разработанных для решения *гиперболических систем уравнений*. Математические модели, представленные уравнениями указанного типа, широко распространены. Однако особое место среди них занимают уравнения газовой динамики, так как с их решением связан наибольший прогресс в разработке численных методов для гиперболических систем уравнений. Уравнения газовой динамики и будут предметом нашего внимания до конца настоящего пособия. В данной главе мы приведем различные формы записи этих уравнений и укажем некоторые их свойства, которые могут быть полезными при конструировании численных алгоритмов. (Более полные сведения об уравнениях газовой динамики можно найти в [3].)

§1. Формы записи уравнений газовой динамики

1.1. Интегральные законы сохранения

Будем рассматривать модель *невязкого нетеплопроводного* газа, движущегося *в отсутствие внешних сил и внешних источников энергии*. Кроме того, будем считать течение *одномерным и плоским*, т. е. таким, для которого может быть выбрана прямоугольная декартова система координат xuz , в которой газ движется только вдоль оси x и ни один из параметров не зависит от координат y и z .

Интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho u dx = P_{x=a(t)} - P_{x=b(t)},$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dx = (pu)_{x=a(t)} - (pu)_{x=b(t)}.$$

Здесь $[a(t), b(t)]$ — произвольный отрезок, состоящий из одних и тех же частиц ("движущийся объем"); ρ — плотность, u — скорость, p — давление, ε — удельная внутренняя энергия. Газ считается идеальным политропным, для которого выполняется соотношение $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где константа γ называется показателем адиабаты. Далее будут использоваться обозначения: E — удельная полная энергия, c — скорость звука, H — удельная полная энтальпия.

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2}{2}, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad H = E + \frac{p}{\rho}.$$

Те же самые законы сохранения можно записать для произвольного фиксированного в пространстве отрезка $[a, b]$ в виде балансовых уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho dx = (\rho u)_{x=a} - (\rho u)_{x=b},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho u dx = (\rho u^2 + p)_{x=a} - (\rho u^2 + p)_{x=b},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dx = \left(u \left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right) \right)_{x=a} -$$

$$-\left(u(p + \rho(\epsilon + \frac{u^2}{2})) \right)_{x=b} . \quad (84)$$

Когда отрезок $[a, b]$ фиксирован, частицы газа могут пересекать его границы, поэтому в правые части уравнений (84) вошли потоки подынтегральных величин — $\rho \cdot u$, $\rho u \cdot u$ и $\rho(\epsilon + u^2/2) \cdot u$.

1.2. Дивергентная форма записи

Для достаточно гладких течений интегральные законы сохранения эквивалентны дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} (u(\rho E + p)) &= 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Уравнения (85) можно представить в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (86)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Про уравнения газовой динамики (85) или (86) говорят, что они записаны в *дивергентной форме*.

1.3. Недивергентная форма записи

При построении разностных схем используются также другие формы записи уравнений. Учитывая равенство $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$, где $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ — матрица Якоби, из (86) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (88)$$

Матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-1)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-1}{2}u^3 - uH & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Воспользовавшись равенствами $\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$ и $\frac{\partial U}{\partial x} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$, преобразуем (5) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0. \quad (90)$$

Здесь

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix}, \quad (91)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix}. \quad (92)$$

В покомпонентном виде система уравнений (90) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

1.4. Соотношения на сильном разрыве

Из интегральных законов сохранения следует, что если при некотором $x = x_s(t)$ величины ρ , u , p терпят разрыв, но существуют их пределы слева и справа, равные соответственно ρ_L , u_L , p_L и ρ_R , u_R , p_R , то должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \rho_L(u_L - D) &= \rho_R(u_R - D), \\ p_L + \rho_L(u_L - D)^2 &= p_R + \rho_R(u_R - D)^2, \\ \rho_L E_L(u_L - D)^2 + p_L u_L &= \rho_R E_R(u_R - D)^2 + p_R u_R, \end{aligned} \quad (93)$$

называемые соотношениями на сильном разрыве [3]. Скорость перемещения разрыва обозначена как $D = dx_s / dt$. После небольших преобразований соотношения на сильном разрыве для ударной волны принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_L(u_L - D) &= \rho_R(u_R - D), \\ p_L + \rho_L(u_L - D)^2 &= p_R + \rho_R(u_R - D)^2, \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_L}{\rho_L} + \frac{1}{2}(u_L - D)^2 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_R}{\rho_R} + \frac{1}{2}(u_R - D)^2. \end{aligned} \quad (94)$$

Равенства (93) можно рассматривать также как соотношения, связывающие скачок вектора потоков со скачком вектора консервативных переменных и скоростью ударной волны:

$$\begin{aligned} (\rho_R u_R) - (\rho_L u_L) &= D(\rho_R - \rho_L), \\ (\rho_R u_R^2 + p_R) - (\rho_L u_L^2 + p_L) &= D(\rho_R u_R - \rho_L u_L), \\ u_R(\rho_R E_R + p_R) - u_L(\rho_L E_L + p_L) &= D(\rho_R E_R - \rho_L E_L). \end{aligned} \quad (95)$$

С учетом обозначений (87) соотношения (95) принимают:

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = D(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L). \quad (96)$$

После исключения из (94) относительных скоростей получается соотношение, связывающее только термодинамические величины:

$$\frac{p_R}{p_L} = \frac{(\gamma + 1)\rho_R - (\gamma - 1)\rho_L}{(\gamma + 1)\rho_L - (\gamma - 1)\rho_R}.$$

§2. Свойства уравнений газовой динамики

2.1. Гиперболичность

Система уравнений газовой динамики является гиперболической. Это выражается в том, что матрица Якоби \mathbf{A} (89) имеет три действительных собственных числа $a_1 = u - c$, $a_2 = u$, $a_3 = u + c$ и полную систему собственных векторов. С помощью матриц \mathbf{L} и \mathbf{R} , составленных соответственно из левых и правых собственных векторов матрицы \mathbf{A} , она приводится к диагональному виду

$$\begin{aligned} \mathbf{LAR} &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{D} = \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + c \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (97)$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} uc + (\gamma - 1) \frac{u^2}{2} & -c - (\gamma - 1)u & \gamma - 1 \\ 1 - (\gamma - 1) \frac{u^2}{2c^2} & (\gamma - 1) \frac{u}{c^2} & -(\gamma - 1) \frac{1}{c^2} \\ -uc + (\gamma - 1) \frac{u^2}{2} & c - (\gamma - 1)u & \gamma - 1 \end{pmatrix}, \quad (98)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & 1 & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{1}{2c^2}(u - c) & u & \frac{1}{2c^2}(u + c) \\ \frac{1}{2c^2}(H - uc) & \frac{u^2}{2} & \frac{1}{2c^2}(H + uc) \end{pmatrix}. \quad (99)$$

2.2. Характеристическая форма уравнений

Используя равенство (97), преобразуем уравнение (88):

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{RDL} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \mathbf{L} \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{DL} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (100)$$

Про уравнения газовой динамики (100) говорят, что они записаны в *характеристической форме*. Это объясняется тем, что в каждое из трех уравнений (100), которые также называют *соотношениями на характеристиках*, входят производные только вдоль соответствующих характеристик. Например, первое из уравнений, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^3 l_{1i} \frac{\partial U_i}{\partial t} + a_1 \sum_{i=1}^3 l_{1i} \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0, \quad (101)$$

или

$$\sum_{i=1}^3 l_{1i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + a_1 \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) = 0,$$

содержит производные вдоль характеристики, заданной уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a_1 = u - c.$$

Если бы удалось *проинтегрировать соотношение на характеристике* (101), т. е. найти функцию W_1 , которая при некотором $\mu_1 \neq 0$ удовлетворяет равенству

$$dW_1 = \mu_1 \sum_{i=1}^3 l_{1i} dU_i,$$

то из уравнения (101) следовало бы

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} + a_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0,$$

или $D_1 W_1 = 0$, где оператор D_1 обозначает дифференцирование вдоль характеристики: $D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x}$. Затем можно попытаться аналогичным

образом преобразовать и остальные уравнения (100), приведя их к более простому виду

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad (102)$$

где $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)^T$. Функции W_k называются *инвариантами Римана*. (Следует иметь в виду, что в литературе встречаются и другие определения инвариантов Римана!) Известно, однако, что только для систем из двух уравнений всегда существует преобразование их к виду (102). Уравнения газовой динамики (88), к сожалению, не являются исключением, их нельзя представить в виде (102). Но если предположить изэнтропичность течения, то система уравнений (88) сведется к двум уравнениям, для которых соотношения на характеристиках интегрируются. Это помогает построить точное решение, что важно для тестирования численных методов. Соотношения на характеристиках, очевидно, могут быть проинтегрированы и в случае, когда элементы матрицы \mathbf{L} являются константами. К такому допущению, хотя оно и неточное, иногда прибегают при конструировании разностных схем.

2.3. Однородность вектора потоков

Приведем еще одно полезное свойство уравнений газовой динамики, в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой. Оказывается, что вектор потоков \mathbf{F} (смысл названия становится понятным, если сравнить правую часть балансовых уравнений (84) с выражением (87) для \mathbf{F}) является однородной функцией первой степени от \mathbf{U} , т. е. справедливо равенство

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{U}.$$

Систему уравнений (86), следовательно, можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \mathbf{U}) = 0.$$

Глава 4. Некоторые постановки задач и точные решения для уравнений газовой динамики

В данной главе формулируются задачи, на которых можно тестировать численные методы для уравнений газовой динамики. Формулы, которые

задают точные решения, приводятся без подробных объяснений. Для получения деталей на этот счет рекомендуем обратиться к [3] и [12].

§1. Задача о работе ударной трубы

1.1. Постановка задачи

Представим себе *прямолинейную* трубу *бесконечной* длины и *неизменного* сечения, которая заполнена *покоющимся* газом и перегородена заслонкой, как на рис. 14. По обе стороны от заслонки газ имеет *постоянные* параметры: слева — ρ_1, u_1, p_1 , справа — ρ_2, u_2, p_2 . Для определенности считаем, что $p_1 > p_2$. В момент времени $t = 0$ заслонка *мгновенно* убирается. Требуется описать изменение во времени параметров газа в трубе.

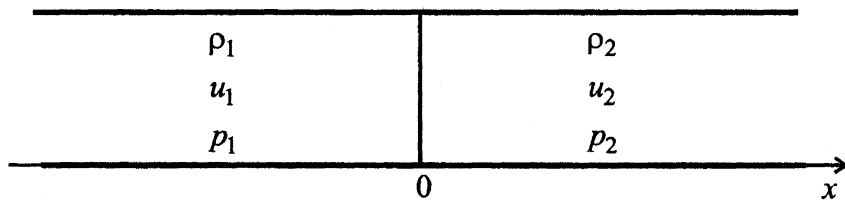


Рис. 14

Направив ось x вдоль трубы, мы можем считать задачу одномерной и сформулировать ее следующим образом. Найти функции $\rho(x, t), u(x, t), p(x, t)$, удовлетворяющие при $\{t \geq 0; -\infty < x < \infty\}$ уравнениям газовой динамики, а также начальным условиям при $t = 0$:

$$(\rho(x, 0), u(x, 0), p(x, 0)) = \begin{cases} (\rho_1, u_1, p_1), & x \leq 0, \\ (\rho_2, u_2, p_2), & x > 0, \end{cases}$$

$$u_1 = u_2 = 0.$$

1.2. Точное решение

Решение является автомодельным, все функции постоянны вдоль лучей $x/t = \text{const}$ [3]. На рис. 15 показана структура решения. По газу низкого

давления вправо со скоростью D идет ударная волна, за которой со скоростью u_3 следует контактный разрыв. По газу высокого давления влево распространяется волна разрежения, задний и передний фронты которой движутся соответственно со скоростями $c'_3 - u_3$ и c_1 .

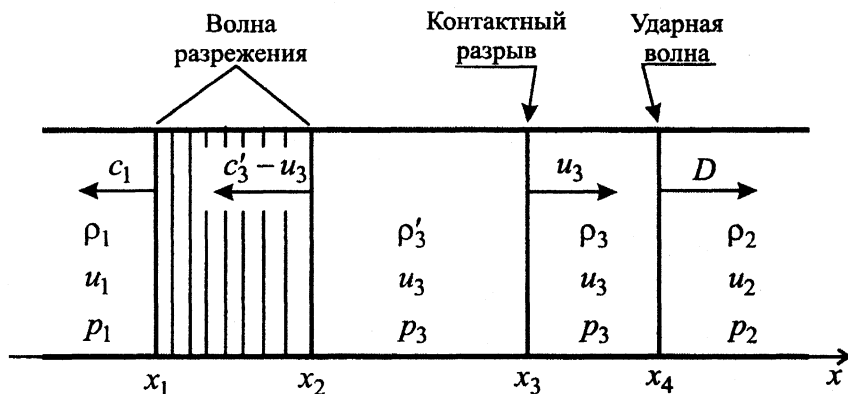


Рис. 15

Параметры течения находятся следующим образом.

1. При $x > x_4 = Dt$ решение постоянно:

$$\rho = \rho_2, \quad u = u_2, \quad p = p_2.$$

2. При $x \leq x_1 = -c_1 t$ решение постоянно:

$$\rho = \rho_1, \quad u = u_1, \quad p = p_1.$$

3. При $x \in (x_3, x_4) = (u_3 t, Dt)$ решение постоянно:

$$\rho = \rho_3, \quad u = u_3, \quad p = p_3.$$

Скорость u_3 и давление p_3 за ударной волной находятся из системы уравнений

$$u_3 + \frac{2}{\gamma - 1} \left(\gamma \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \right)^{1/2} p_3^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\gamma \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \right)^{1/2} p_1^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}},$$

$$(u_3 - u_2)^2 = (p_3 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \frac{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2} \right).$$

(После исключения u_3 получается уравнение для p_3 , которое решается каким-либо итерационным методом, например методом деления отрезка пополам, учитывая, что $p_2 < p_3 < p_1$.) Затем находятся ρ_3 и D :

$$\rho_3 = \rho_2 \frac{(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_2},$$

$$D = u_3 \frac{\rho_3}{\rho_3 - \rho_2}.$$

4. При $x \in (x_2, x_3) = ((u_3 - c'_3)t, u_3 t)$ решение постоянно:

$$\rho = \rho'_3, \quad u = u_3, \quad p = p_3,$$

где $\rho'_3 = \rho_1 \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{1/\gamma}$, $c'_3 = \sqrt{\frac{\gamma p_3}{\rho'_3}}$.

5. При $x \in (x_1, x_2) = (-c_1 t, (u_3 - c'_3)t)$, т. е. в волне разрежения, решение не постоянно:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}, \quad c = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{x}{t} \right),$$

$$\rho = \left(\frac{c^2}{\gamma} \frac{\rho_1^\gamma}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_1 + \frac{x}{t} \right), \quad p = \frac{c^2}{\gamma} \rho.$$

1.3. Задание расчетной области

В задаче о работе ударной трубы начальные условия заданы на бесконечной по x области. Численно же задача может решаться только в ограниченной области.

Для задания границ расчетной области будем считать, что нас интересует решение задачи на временном интервале $0 \leq t \leq T$. Из структуры решения, показанной на рис. 15, видно, что если левую границу x_L расчетной области выбрать из условия $x_L < -c_1 T$ (например $x_L = -1,5c_1 T$), а правую границу x_R — из условия $x_R > DT$ (например $x_R = 1,5DT$), то при $0 \leq t \leq T$ левая граница будет находиться в невозмущенном газе с параметрами ρ_1, u_1, p_1 , а правая — в невозмущенном газе с параметрами

ρ_2, u_2, p_2 . Расчетная область в плоскости переменных x, t будет представлять собой прямоугольник (рис. 16), ограниченный прямыми $x = x_L, x = x_R, t = 0$ и $t = T$.

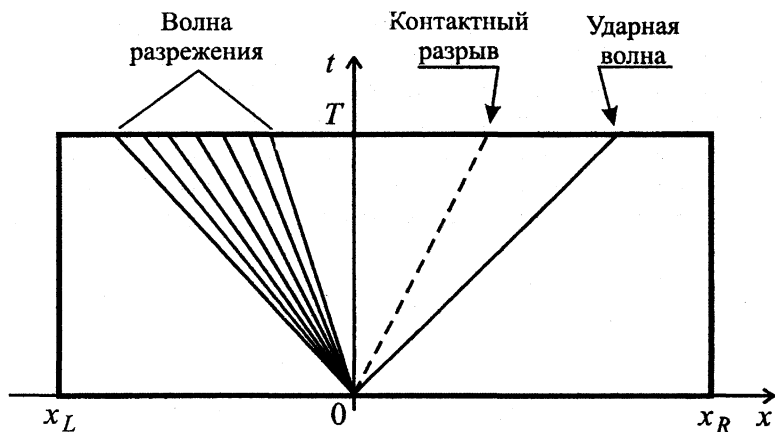


Рис. 16

Задача теперь может быть сформулирована так. В прямоугольнике $\{0 \leq t \leq T; x_L \leq x \leq x_R\}$ найти решение одномерных нестационарных уравнений газовой динамики, удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$(\rho(x,0), u(x,0), p(x,0)) = \begin{cases} (\rho_1, u_1, p_1), & x_L \leq x \leq 0, \\ (\rho_2, u_2, p_2), & 0 < x \leq x_R, \end{cases}$$

$$u_1 = u_2 = 0,$$

$$(\rho(x_L, t), u(x_L, t), p(x_L, t)) = (\rho_1, u_1, p_1),$$

$$(\rho(x_R, t), u(x_R, t), p(x_R, t)) = (\rho_2, u_2, p_2).$$

§2. Квазиодномерное течение в канале

2.1. Квазиодномерные уравнения газовой динамики

Рассмотрим течение невязкого газа в канале переменного сечения, которое является “почти” одномерным и приближенно описывается так называемыми *квазиодномерными* уравнениями. Предположим, что общее направление канала близко к прямолинейному, расположим ось x вдоль этого направления, как на рис. 17, и пренебрежем силами, действующими на частицы газа, и скоростями частиц в поперечных к оси x направлениях. Тогда все параметры течения можно считать постоянными в каждом поперечном сечении и зависящими только от положения сечения вдоль оси канала.

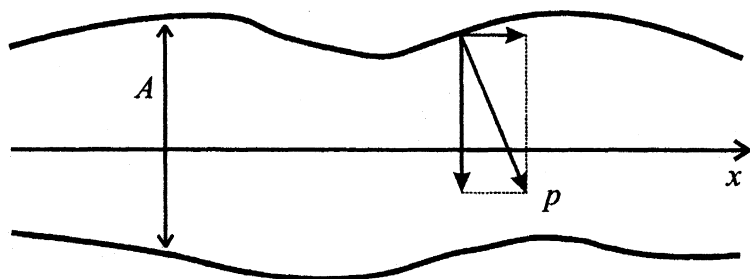


Рис. 17

Площадь поперечного сечения канала, зависящую от x , будем обозначать A . Соотношения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии для такого движения газа, очень похожи на соответствующие соотношения для строго одномерного движения. Например, интегральные законы сохранения для фиксированного объема, подобные балансовым соотношениям (84), записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b A \rho dx = (A \rho u)_{x=a} - (A \rho u)_{x=b},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b A \rho u dx = (A \rho u^2 + A p)_{x=a} - (A \rho u^2 + A p)_{x=b} + \int_a^b p \frac{\partial A}{\partial x} dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b A \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dx = \left(A u \left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right) \right)_{x=a} - \left(A u \left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right) \right)_{x=b}. \quad (103)$$

В отличие от уравнений (84) в (103) вошла площадь сечения канала A . Очевидным является ее присутствие в интегралах левых частей уравнений, представляющих суммарные значения сохраняемых величин на отрезке $[a, b]$, а также в правых частях уравнений — в слагаемых, выражающих потоки сохраняемых величин через границы отрезка $[a, b]$. Появление в уравнении импульсов нового слагаемого (оно подчеркнуто) обусловлено тем, что со стороны стенок канала на газ действует сила давления. Направленная в каждой точке по нормали к стенке канала, эта сила имеет ненулевую составляющую в продольном направлении при $\frac{dA}{dx} \neq 0$, рис. 17. Ее вклад в изменение количества движения на отрезке $[a, b]$ и представлен подчеркнутым слагаемым.

Для гладких течений уравнения (103) эквивалентны дифференциальным уравнениям в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (A\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (A\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (A\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (A\rho u^2 + A p) &= p \frac{dA}{dx}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (A\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} (A u (\rho E + p)) &= 0. \end{aligned} \quad (104)$$

2.2. Точное решение

А теперь вернемся к основной задаче этой главы — построению точных решений для уравнений газовой динамики. (Правильнее сказать, мы занимаемся подбором задач, точные решения которых можем найти.) С этой целью рассмотрим квазиодномерное течение в канале, площадь сечения которого $A(x)$ сначала монотонно убывает, а затем монотонно возрастает, как на рис. 18.

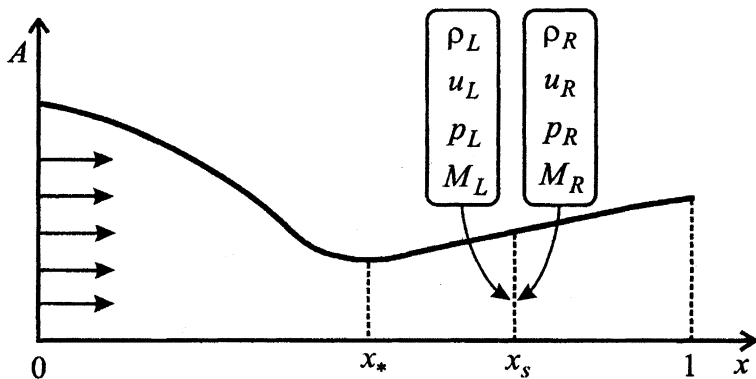


Рис. 18

Функция $A(x)$ предполагается известной. Для определенности считаем, что газ в канале течет слева направо, начало канала соответствует координате $x = 0$, конец канала — координате $x = 1$, минимальное сечение с площадью A_* , называемое критическим, расположено при $x_* \in (0, 1)$.

Будем интересоваться только *стационарными* течениями, т. е. течениями, не зависящими от времени и удовлетворяющими, следовательно, уравнениям, в которых производные по времени отброшены. Для течений без разрывов, например, могут быть взяты полученные из (104) уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(A\rho u) &= 0, \\ \frac{d}{dx}(A\rho u^2 + Ap) &= p \frac{dA}{dx}, \\ \frac{d}{dx}(Au(\rho E + p)) &= 0. \end{aligned} \quad (105)$$

Из этих уравнений следует [12], что дозвуковые течения, т. е. такие, для которых число Маха $M = u/c$ меньше единицы, ускоряются в суживающейся части канала и замедляются в расширяющейся части канала. Сверхзвуковые течения ($M > 1$), что может показаться удивительным, ведут себя противоположным образом — замедляются в суживающейся части канала и ускоряются в расширяющейся части. Следовательно, дозвуковой на входе в канал поток газа, ускоряясь на суживающемся участке, может достигнуть скорости звука ($M = 1$) в критическом сечении при $x = x_*$ и,

превратившись в сверхзвуковой поток, продолжить ускоряться на расширяющемся участке. Ниже даются формулировки задач и их точные решения именно такого типа. Наряду с гладким течением рассматривается случай, когда поток является сверхзвуковым только на некотором участке расширяющейся части канала (что возможно лишь при наличии ударной волны, при прохождении через которую газ тормозится).

Основную роль будут играть формулы, задающие параметрическое решение уравнений (105), где роль параметра играет число Маха M :

$$\frac{A}{\tilde{A}} = \frac{\tilde{M}}{M} \Theta^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad \Theta = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \tilde{M}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}, \quad (106)$$

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}} = \Theta^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{u}{\tilde{u}} = \frac{M}{\tilde{M}} \Theta^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{p}{\tilde{p}} = \Theta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (107)$$

По известным $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{p}$ в каком-либо сечении канала $x = \tilde{x}$ сначала из (106) находится число Маха M , а затем из (107) и остальные функции. (Напомним определение числа Маха: $M = u/c$, $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$.)

2.3. Гладкое течение в канале

1. Зададим плотность и давление на входе в канал — ρ_0, p_0 . Зададим площадь сечения канала — $A(x)$, $x \in [0, 1]$. Считаем, что в критическом сечении $x = x_*$ газ движется со скоростью звука, т. е. $M_* = 1$.

2. Из (106), полагая $\tilde{x} = x_*$, находим M_0 — число Маха во входном сечении.

Замечание. Уравнение (106) может быть решено приближенно каким-либо итерационным методом. При этом надо иметь в виду, что при $A_0 = A(0)$ (как и любом $A > A_*$) оно имеет два корня — один больше, а другой меньше единицы. Нас, очевидно, интересует корень $M_0 < 1$ (ведь мы считаем течение на входе в канал дозвуковым).

3. По известным ρ_0, p_0, M_0 из соотношения $M_0 = u_0 / \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ находим скорость во входном сечении.

4. Из (106), полагая $\tilde{x} = 0$, находим число Маха в любом интересующем нас сечении канала ($M < 1$ при $x < x_*$ и $M > 1$ при $x > x_*$).

5. Зная число Маха M , по формулам (107) находим ρ , u , p в любом сечении канала.

Задачу, решение которой мы построили, можно сформулировать следующим образом: *найти течение в канале известного сечения A , если на входе в канал оно дозвуковое, а на выходе сверхзвуковое. Кроме того, заданы ρ_0 , p_0 — плотность и давление на входе в канал.*

2.4. Разрывное течение в канале

1. Зададим плотность и давление на входе в канал — ρ_0 , p_0 . Зададим площадь сечения канала — $A(x)$, $x \in [0, 1]$. Считаем, что в критическом сечении $x = x_*$ газ движется со скоростью звука, т. е. $M_* = 1$. Зададим сечение $x_s \in (x_*, 1)$ в расширяющейся части канала, в котором сверхзвуковой поток проходит через скачок уплотнения и становится дозвуковым.

2. Из (106), полагая $\tilde{x} = x_*$, находим число Маха M_0 во входном сечении ($M_0 < 1$).

3. По известным ρ_0 , p_0 , M_0 из соотношения $M_0 = u_0 / \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ находим скорость во входном сечении.

4. Из (106), полагая $\tilde{x} = 0$, находим число Маха в любом сечении канала $x \in [0, x_s)$ ($M < 1$ при $x < x_*$ и $M > 1$ при $x \in (x_*, x_s)$).

5. По формулам (107) находим ρ , u , p при $x \in [0, x_s)$.

6. Индексом L пометим величины при $x = x_s$ до скачка, а индексом R — величины при $x = x_s$ после скачка, рис. 18. Зная ρ_L , u_L , p_L , по формулам, вытекающим из соотношений на ударной волне (94), найдем ρ_R , u_R , p_R :

$$\rho_R = \rho_L \frac{\frac{\gamma + 1}{2} M_L^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_L^2}, \quad u_R = u_L \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M_L^2} \right),$$

$$p_R = p_L \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_L^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right), \quad M_R = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2}{\gamma M_L^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{1/2}$$

7. Из (106), полагая $\tilde{x} = x_s$, $\tilde{p} = p_R$ и т. д., находим число Маха в любом сечении канала. $x \in (x_s, 1]$ ($M < 1$).

8. По формулам (107) находим ρ , u , p при $x \in (x_s, 1]$.

Задачу, решение которой мы построили, можно сформулировать следующим образом: найти течение в канале известного сечения A , если на входе в канал заданы плотность ρ_0 и давление p_0 , а на выходе канала задано давление p_1 . (Давление p_1 взято из построенного решения.)

2.5. Метод установления и задание дополнительных условий

Задача о течении в канале является стационарной. Ее решение может быть найдено методом установления, суть которого состоит в том, что решение стационарной задачи отыскивается как предел, к которому стремится решение нестационарных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Тогда задача формулируется следующим образом. В полубесконечном прямоугольнике $\{0 \leq t < \infty; 0 \leq x \leq 1\}$ (рис. 19) найти решение квазиодномерных уравнений газовой динамики, удовлетворяющее начальным и граничным условиям.

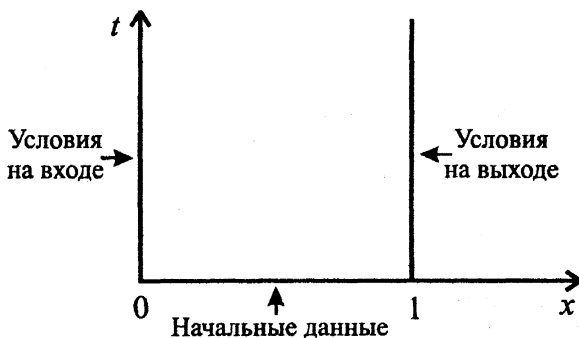


Рис. 19

Количество условий, которые надо задавать на границе расчетной области, определяется количеством характеристик, входящих внутрь области. На входе в канал ($x = 0$) течение дозвуковое, внутрь области здесь входит две характеристики, $dx/dt = u$ и $dx/dt = u + c$, поэтому необходимо задавать две величины. Третья величина должна быть получена из уравнений или взята из точного решения.

Если выходная граница ($x = 1$) является сверхзвуковой, то все характеристики выходят из области и постановка независимых граничных условий переопределяет задачу. Необходимые для применения разностной схемы условия при $x = 1$ могут быть получены из специальной аппроксимации самих уравнений или взяты из точного решения.

На дозвуковой выходной границе должно быть поставлено одно граничное условие. Этим условием может быть задание давления, взятого из точного решения. Остальные замыкающие для схемы условия определяются из уравнений или тоже берутся из точного решения.

В качестве начальных данных могут быть заданы произвольные распределения параметров, в частности постоянные, равные входным параметрам. Интегрирование уравнений по t ведется до тех пор пока не будет достигнут стационарный режим течения, т. е. пока не будут выполнены с заданной точностью дискретные аналоги уравнений (105) или соответствующих им интегральных законов сохранения. На практике обычно бывает достаточно выполнения условия

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \leq 10^{-4}.$$

Глава 5. Разностные схемы для уравнений газовой динамики

Выполнить поставленную перед собой задачу как можно лучше, затратив при этом как можно меньше усилий, — этот милый сердцу всякого нормального человека принцип применительно к разработке численного метода формулируется в виде двух требований: метод должен быть *точным* и *экономичным*.

Разумеется, как о точности, так и экономичности расчета следует говорить лишь в относительном смысле. Во-первых, одну и ту же погрешность результата оценивают как приемлемую в одном случае, но считают недопустимо большой или, наоборот, избыточно маленькой в другом. Одинаково странными будут выглядеть торговки на рынке, отмеривающие овощи с

аптекарской точностью, и скупщики драгоценностей, пользующиеся ржавыми безменами, — точность во всем должна быть *соответствующей*. Во вторых, характер самой ошибки может быть разным; она проявляется, например, в неправильной передаче скорости ударной волны или размазывании ее фронта, немонотонности решения или других формах. Разным численным методам присущи свои типы ошибок.

Понятие экономичности метода отражает суммарные издержки, необходимые для получения решения. Как правило, к таким издержкам относят объем памяти и время работы компьютера, которые расходует программа, реализующая метод. Не следует забывать, однако, и о затратах умственной и физической энергии человека, создающего эту программу. Компьютеры могут иметь разный объем и организацию памяти, разное количество процессоров и быстродействие, численные методы могут существенно отличаться друг от друга сложностью программирования, а программисты — квалификацией; поэтому экономичность метода определяется сочетанием нескольких факторов, доступностью и стоимостью нескольких видов ресурсов.

Очевидно, удачный выбор численного метода играет главную роль в достижении желаемого компромисса между точностью и экономичностью расчета. Возможность выбора предполагает знакомство с несколькими методами — их изучением мы сейчас и займемся. Как и в рассмотренном уже случае скалярного уравнения переноса, наш подход будет состоять в построении дискретного аналога уравнений газовой динамики и последующем решении дискретных уравнений.

§1. Схема Лакса

Для построения первой разностной схемы используем уравнения, записанные в форме (90):

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0.$$

Шаги разностной сетки по времени и по пространственной координате здесь и всюду в дальнейшем будем считать постоянными и обозначать соответственно τ и h .

Для получения конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих систему уравнений газовой динамики, существует множество способов, особенно если учесть, что для каждой входящей в уравнения производной может быть использована своя формула. Проблема, как нетрудно догадаться, состоит в том, что далеко не все из этих способов приводят к сходящейся-

ся разностной схеме. Давайте, например, производные по времени во всех уравнениях аппроксимировать по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\tau}, \quad (108)$$

а все производные по x заменим на центральные разности:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \Lambda f_j^n \equiv \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h}.$$

Это приведет нас к схеме

$$\frac{\mathbf{f}_j^{n+1} - \mathbf{f}_j^n}{\tau} + \mathbf{G}_j^n \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (109)$$

аппроксимирующей уравнения (90) с порядком $O(\tau + h^2)$. Схема (109) очень проста, не составляет труда ее запрограммировать и практически убедиться в том, что она неустойчивая. Оказывается, что для получения из (109) устойчивой схемы аппроксимацию пространственных производных можно оставить прежней, но вместо формулы (108) использовать выражение

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - \frac{1}{2}(f_{j-1}^n + f_{j+1}^n)}{\tau} = f_t - \frac{h^2}{2\tau} f_{xx} + O(\tau). \quad (110)$$

В результате получим схему.

Схема 1 (Лакс)

$$\frac{\mathbf{f}_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j-1}^n + \mathbf{f}_{j+1}^n)}{\tau} + \mathbf{G}_j^n \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (111)$$

где $\mathbf{f} = (\rho, u, p)^T$, а матрица \mathbf{G} определена в (91).

Устойчивость разностной схемы (111) с "замороженными коэффициентами" исследуем спектральным методом. Решение разностных уравнений будем отыскивать в виде гармоники

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}_0 \lambda^n e^{-i\omega x_j} = \mathbf{f}_0 \lambda^n e^{-i\omega j h}, \quad (112)$$

где ω — волновое число, i — мнимая единица. Для устойчивости схемы необходимо, чтобы при любом ω выполнялось неравенство $|\lambda| \leq 1$. Под-

ставляя решение (112) в схему (111), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(\mathbf{I} \frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h})}{\tau} + \mathbf{G} \frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h} \right) \mathbf{f}_0 = 0,$$

которая имеет ненулевое решение только тогда, когда определитель соответствующей матрицы не равен нулю. Это дает нам уравнение для λ :

$$\det \left(\mathbf{I} \frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h})}{\tau} + \mathbf{G} \frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h} \right) = 0, \quad (113)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица. Так как $\mathbf{G} = (\mathbf{LS})^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{LS})$ (см. (91) и (97)) и $\det(\mathbf{LS})^{-1} = 1 / \det(\mathbf{LS}) \neq 0$, то уравнение (113) равносильно уравнению

$$\det \left((\mathbf{LS})^{-1} \left(\mathbf{I} \frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h})}{\tau} + \mathbf{D} \frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h} \right) (\mathbf{LS}) \right) = 0,$$

из которого следует

$$\det \left(\mathbf{I} \frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h})}{\tau} + \mathbf{D} \frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h} \right) = 0. \quad (114)$$

В (114) матрица, определитель которой вычисляется, является диагональной, поэтому легко находятся все три корня:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{1}{2}(e^{-i\omega h} + e^{i\omega h}) - a_k \frac{\tau}{2h}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) = \\ &= \cos \omega h - ia_k \frac{\tau}{h} \sin \omega h, \end{aligned}$$

откуда

$$|\lambda_k|^2 = \cos^2 \omega h + \left(a_k \frac{\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \omega h.$$

Необходимое условие устойчивости $|\lambda_k| \leq 1$ ($k = 1, 2, 3$) выполняется

при $|a_k| \frac{\tau}{h} \leq 1$, или (если вспомнить, чему равны собственные числа a_k

матрицы \mathbf{D}) при $(|u| + c) \frac{\tau}{h} \leq 1$.

Тестирование схемы Лакса проведем на задаче о работе ударной трубы. Поскольку далее с целью сравнения будут показаны расчеты этой задачи еще по нескольким схемам, приведем одинаковые для всех расчетов (если особо не оговорено) входные и расчетные параметры.

Параметры тестовой задачи о работе ударной трубы. Левая граница расчетной области расположена при $x = -4$, правая — при $x = 6$. В начальный момент времени разрыв находится в точке $x = 0$, а постоянные параметры газа слева и справа от него соответственно равны

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \rho_2 \\ u_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Расчетная сетка имеет 101 узел, так что шаг сетки h равен 0,1. Шаг по времени τ равен 0,01. Расчет ведется до момента времени $T = 2,5$. Показатель адиабаты γ полагается равным 1,4.

На рис. 20 показаны результаты расчета по схеме типа (111), но записанной для консервативных переменных, т. е. полученной из уравнений в дивергентной форме (86):

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)}{\tau} + \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

Про численное решение можно сказать, что оно только слегка напоминает точное решение, изображенное на рисунке сплошной линией.

Можно попытаться повысить точность расчета путем уменьшения параметров сетки, которое приведет к уменьшению погрешности аппроксимации. Судя по (110), однако, независимое друг от друга уменьшение сеточных параметров τ и h может привести не к уменьшению, а к увеличению

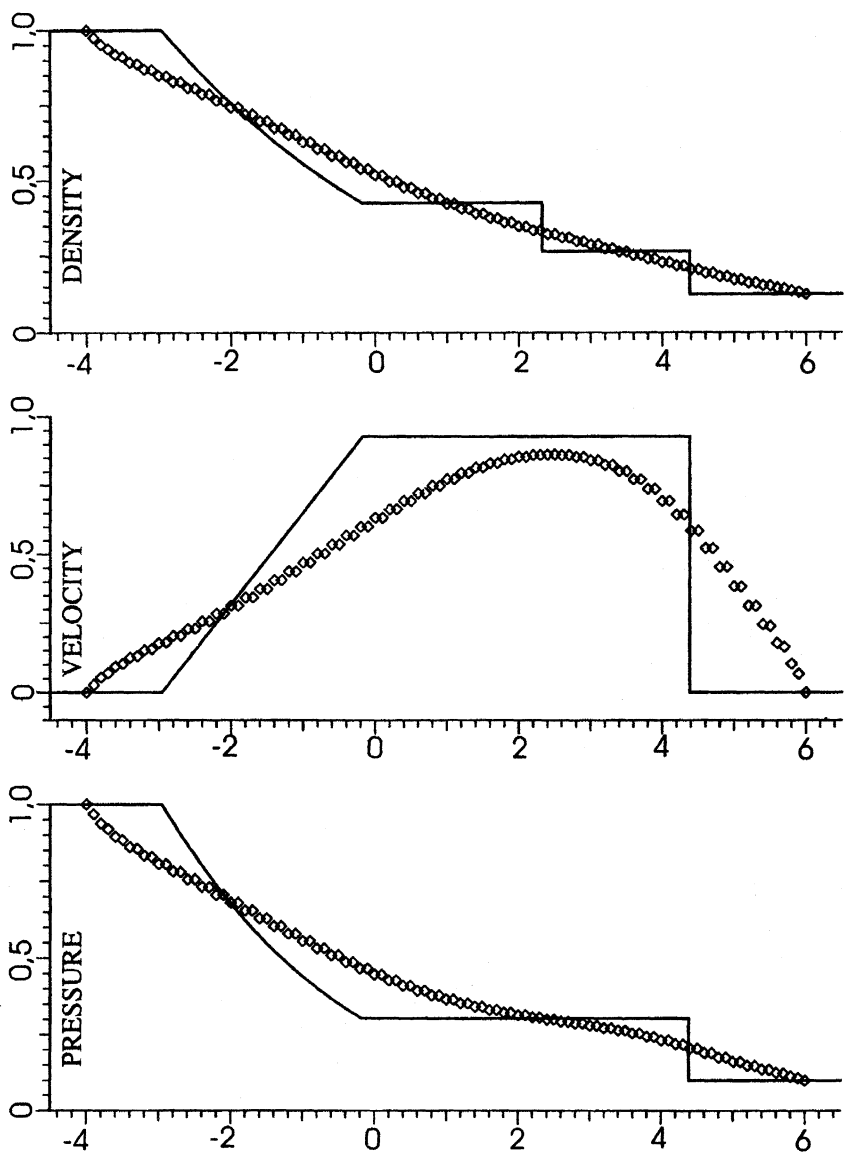


Рис. 20

погрешности, поскольку она содержит слагаемое $\frac{h^2}{2\tau} f_{xx}$. Схемы такого сорта называются схемами с *условной аппроксимацией*. Попробуйте уменьшать h не меняя τ или уменьшать оба параметра оставляя их отношение неизменным — в обоих случаях результат станет точнее.

Схеме Лакса проста в программировании и может быть использована в качестве быстрого, хотя и не очень точного, инструмента для получения предварительной информации о течении.

§2. Явные схемы первого порядка

Из построения схемы Лакса, пожалуй, трудно извлечь какой-либо принцип, позволяющий среди многих способов аппроксимации выбрать те, которые приводят к устойчивым схемам. Использование для производной по времени формулы (110), что и придало схеме устойчивость, выглядит просто удачной догадкой. Нельзя отрицать, конечно, что при конструировании разностных схем свою роль играют догадки и основанная на опыте интуиция, учет особенностей конкретного уравнения и так называемый метод проб и ошибок, но нельзя отрицать также и того, что все ваши пробы могут именно ошибками и закончиться. Поэтому хотелось бы иметь на вооружении некую стратегию, приводящую к успеху наверняка.

Неплохую подсказку на этот счет дают нам опыты со скалярным уравнением переноса. Как и в скалярном случае, к устойчивой разностной схеме для системы уравнений приводит такой способ аппроксимации производных, при котором конечно-разностные уравнения в некотором смысле точнее приближают характеристические соотношения, вытекающие из исходных дифференциальных уравнений. Для пояснения сказанного на рис. 21 показан шаблон схемы, где через узел $(j, n + 1)$, в котором требуется найти значения функций, проведены все три характеристики. Заметим, что изображение характеристик в виде прямых линий является упрощением, так как для системы уравнений газовой динамики характеристики не обязаны быть прямолинейными. Если наклон характеристики положителен, т. е. если она пересекает отрезок $[x_{j-1}, x_j]$, то производные по x в соответствующем характеристическом соотношении будем аппроксимировать разностью назад:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \Lambda_- f_j^n \equiv \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{h}.$$

В противном случае, т. е. если характеристика пересекает отрезок $[x_j, x_{j+1}]$, в соответствующем характеристическом соотношении будем использовать разность вперед:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \Lambda_+ f_j^n \equiv \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h}.$$

Очевидно, что при достаточно маленьком шаге по времени τ все характеристики пересекут отрезок $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Для этого достаточно потребовать выполнение неравенства

$$\max_k |a_k| \frac{\tau}{h} \leq 1,$$

где a_k — собственные числа матрицы \mathbf{G} .

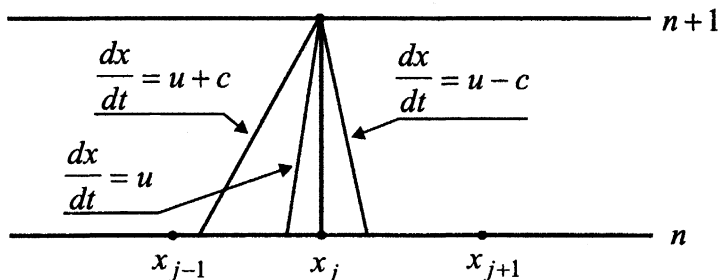


Рис. 21

Теперь для определенности предположим, что $a_1 = u - c < 0$, $a_2 = u > 0$, $a_3 = u + c > 0$, и запишем конечно-разностную схему, построенную согласно указанному правилу. Но сначала получим характеристические соотношения для уравнений (90), для чего, подобно тому как мы это делали для уравнений в дивергентной форме, найдем матрицы, составленные из левых и правых собственных векторов матрицы \mathbf{G} и обозначаемые соответственно $\tilde{\mathbf{L}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}$:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{\rho}{2c} & \frac{1}{2c^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{c}{\rho} & 0 & \frac{c}{\rho} \\ c^2 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

С этими матрицами выполняется равенство $\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{G}\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{D}$, где \mathbf{D} — уже известная нам матрица с собственными числами на диагонали: $\mathbf{D} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Характеристические соотношения имеют вид

$$\tilde{\mathbf{L}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{L}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0.$$

Запишем их покомпонентно, одновременно заменяя производные по x на конечные разности в соответствии со знаками собственных чисел:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{1i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_1 \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{1i} \Lambda_+ f_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{2i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_2 \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{2i} \Lambda_- f_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{3i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_3 \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{3i} \Lambda_- f_i &= 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Характеристическая форма уравнений нам нужна здесь только для того, чтобы правильно выбрать направление численного дифференцирования, поэтому от уравнений (116), умножая их слева на матрицу $\tilde{\mathbf{R}}$, можно вернуться к аналогу исходных уравнений. Мы так и сделаем, но предварительно введем обозначения, делающие запись обратного перехода более удобной. Обозначим $d_k^\pm = 0,5 \cdot (a_k \pm |a_k|)$, $k = 1, 2, 3$. Очевидно, $d_k^+ \geq 0$, $d_k^- \leq 0$, $a_k = d_k^+ + d_k^-$, $|a_k| = d_k^+ - d_k^-$. Например, в нашем случае

$$\begin{pmatrix} d_1^+ \\ d_2^+ \\ d_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_2^- \\ d_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Еще обозначим $\mathbf{D}^+ = \text{diag}(d_1^+, d_2^+, d_3^+)$, $\mathbf{D}^- = \text{diag}(d_1^-, d_2^-, d_3^-)$. Тогда матрица \mathbf{D} может быть представлена в виде суммы двух диагональных матриц как $\mathbf{D} = \mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^-$. Теперь уравнения (116) можно переписать:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{1i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + d_1^+ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{1i} \Lambda_- f_i + d_1^- \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{1i} \Lambda_+ f_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{2i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + d_2^+ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{2i} \Lambda_- f_i + d_2^- \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{2i} \Lambda_+ f_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{3i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + d_3^+ \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{3i} \Lambda_- f_i + d_3^- \sum_{i=1}^3 \tilde{l}_{3i} \Lambda_+ f_i &= 0. \end{aligned} \quad (117)$$

После умножения уравнений (117) слева на матрицу $\tilde{\mathbf{R}}$ получаем

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^+ \tilde{\mathbf{L}} \Lambda_- \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^- \tilde{\mathbf{L}} \Lambda_+ \mathbf{f} = 0.$$

Вводя обозначения для матриц $\mathbf{G}^+ = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^+ \tilde{\mathbf{L}}$ и $\mathbf{G}^- = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^- \tilde{\mathbf{L}}$ (очевидно, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-$), аппроксимируя производную по времени и дописывая опускавшиеся до сих пор индексы, приходим к искомой конечно-разностной схеме:

$$\frac{\mathbf{f}_j^{n+1} - \mathbf{f}_j^n}{\tau} + (\mathbf{G}^+)_j \Lambda_- \mathbf{f}_j^n + (\mathbf{G}^-)_j \Lambda_+ \mathbf{f}_j^n = 0. \quad (118)$$

Исследуем устойчивость разностной схемы (118).

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{I} \frac{\lambda - 1}{\tau} + \mathbf{G}^+ \frac{1 - e^{-i\omega h}}{h} + \mathbf{G}^- \frac{e^{i\omega h} - 1}{h} \right) &= 0, \\ \det \tilde{\mathbf{L}} \left(\mathbf{I} \frac{\lambda - 1}{\tau} + \mathbf{D}^+ \frac{1 - e^{-i\omega h}}{h} + \mathbf{D}^- \frac{e^{i\omega h} - 1}{h} \right) \tilde{\mathbf{R}} &= 0, \\ \det \left(\mathbf{I} \frac{\lambda - 1}{\tau} + \mathbf{D}^+ \frac{1 - e^{-i\omega h}}{h} + \mathbf{D}^- \frac{e^{i\omega h} - 1}{h} \right) &= 0. \\ \lambda_k &= 1 - \frac{\tau}{h} \left(d_k^+ (1 - e^{-i\omega h}) + d_k^- (e^{i\omega h} - 1) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\tau}{h} \left(d_k^+ (1 - \cos \omega h + i \sin \omega h) + d_k^- (\cos \omega h + i \sin \omega h - 1) \right) = \\
&= 1 - \frac{\tau}{h} (d_k^+ - d_k^-) (1 - \cos \omega h) - i \frac{\tau}{h} (d_k^+ + d_k^-) \sin \omega h = \\
&= 1 - |a_k| \frac{\tau}{h} (1 - \cos \omega h) - i a_k \frac{\tau}{h} \sin \omega h. \\
|\lambda_k|^2 &= \left(1 - |a_k| \frac{\tau}{h} (1 - \cos \omega h) \right)^2 + \left(a_k \frac{\tau}{h} \sin \omega h \right)^2 = \\
&= 1 - 2 |a_k| \frac{\tau}{h} (1 - \cos \omega h) + \left(|a_k| \frac{\tau}{h} \right)^2 (1 - 2 \cos \omega h + 1) = \\
&= 1 - 2 |a_k| \frac{\tau}{h} \left(1 - |a_k| \frac{\tau}{h} \right) (1 - \cos \omega h).
\end{aligned}$$

Таким образом, $|\lambda_k|^2 = 1 - 4 |a_k| \frac{\tau}{h} \left(1 - |a_k| \frac{\tau}{h} \right) \sin^2 \frac{\omega h}{2}$, откуда следует,

что при $|a_k| \frac{\tau}{h} \leq 1$ выполняется необходимое условие устойчивости

$$|\lambda_k| \leq 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Вы заметили, конечно, что сочетание знаков собственных чисел, взятое нами для определенности, никоим образом не сказалось ни на записи конечно-разностной схемы в виде (118), ни на доказательстве ее устойчивости.

Это означает, что схема (118) является устойчивой при $|a_k| \frac{\tau}{h} \leq 1$ и произвольном сочетании знаков собственных чисел, если только матрицы \mathbf{G}^+ и \mathbf{G}^- построены указанным выше способом.

Нетрудно заметить также, что устойчивая схема получается и при более общем представлении матрицы \mathbf{G} в виде суммы $\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^-$. Действительно, пусть $\mathbf{G}^+ = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^+ \tilde{\mathbf{L}}$ и $\mathbf{G}^- = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^- \tilde{\mathbf{L}}$, где \mathbf{D}^+ и \mathbf{D}^- — произвольные диагональные матрицы, лишь бы $\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^- = \mathbf{D}$ и на диагонали у матрицы \mathbf{D}^+ стояли неотрицательные числа d_k^+ , а у матрицы \mathbf{D}^- — не-

положительные числа d_k^- . Условие устойчивости в этом случае вытекает из неравенства

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4(d_k^+ - d_k^-) \frac{\tau}{h} \left(1 - (d_k^+ - d_k^-) \frac{\tau}{h} \right) \sin^2 \frac{\omega h}{2} + 4 \frac{\tau^2}{h^2} d_k^+ d_k^- \sin^2 \omega h \leq 1$$

и имеет вид

$$(d_k^+ - d_k^-) \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (119)$$

Какую же выгоду можно извлечь, располагая свободой в выборе \mathbf{D}^+ и \mathbf{D}^- ? Чтобы ответить на этот вопрос, обратим внимание на то, что участвующие в схеме (118) матрицы \mathbf{G}^+ и \mathbf{G}^- надо вычислять с помощью умножений: $\mathbf{G}^+ = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D}^+\tilde{\mathbf{L}}$, $\mathbf{G}^- = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D}^-\tilde{\mathbf{L}}$ или $\mathbf{G}^- = \mathbf{G} - \mathbf{G}^+$ (для чего должны быть найдены матрицы $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{L}}$). Если же на диагонали у матрицы \mathbf{D}^+ , например, стоят *одинаковые* числа $d_k^+ = d^+$, $k = 1, 2, 3$, то вычисление \mathbf{G}^+ и \mathbf{G}^- упрощается:

$$\mathbf{G}^+ = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{D}^+\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{R}}(d^+\mathbf{I})\tilde{\mathbf{L}} = d^+\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}^- = \mathbf{G} - \mathbf{G}^+.$$

В качестве d^+ можно взять, например, спектральный радиус матрицы \mathbf{G} , другими словами, можно положить $d^+ = \max_k |a_k|$.

К сожалению, такое упрощающее схему разбиение матрицы \mathbf{D} имеет и негативные последствия. Во-первых, условие устойчивости схемы может стать более жестким, т. е. может уменьшиться величина шага по времени τ , допускаемая условием (119). Во-вторых, могут ухудшиться аппроксимационные свойства схемы, что в данном случае означает увеличение главного члена в погрешности аппроксимации схемы (порядок которой, правда, остается прежним — первым).

Запишем несколько конечно-разностных схем рассмотренного типа.

Схема 2

$$\frac{\mathbf{f}_j^{n+1} - \mathbf{f}_j^n}{\tau} + (\mathbf{G}^+)_j^n \Lambda_- \mathbf{f}_j^n + (\mathbf{G}^-)_j^n \Lambda_+ \mathbf{f}_j^n = 0,$$

где

$$\mathbf{f} = (\rho, u, p)^T,$$

$$\mathbf{G}^\pm = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^\pm \tilde{\mathbf{L}}, \quad \mathbf{D}^\pm = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm),$$

$$d_k^\pm = \frac{1}{2}(a_k \pm |a_k|),$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c,$$

$\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{L}}$ определены в (115).

Схема 3

$$\frac{\mathbf{f}_j^{n+1} - \mathbf{f}_j^n}{\tau} + (\mathbf{G}^+)_j^n \Lambda_- \mathbf{f}_j^n + (\mathbf{G}^-)_j^n \Lambda_+ \mathbf{f}_j^n = 0,$$

где

$$\mathbf{f} = (\rho, u, p)^T$$

$$\mathbf{G}^+ = \max_k |a_k| \cdot \mathbf{I}, \quad \mathbf{G}^- = \mathbf{G} - \mathbf{G}^+,$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c,$$

$\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{L}}$ определены в (115).

Схема 4

$$\frac{\mathbf{f}_j^{n+1} - \mathbf{f}_j^n}{\tau} + (\mathbf{G}^+)_j^n \Lambda_- \mathbf{f}_j^n + (\mathbf{G}^-)_j^n \Lambda_+ \mathbf{f}_j^n = 0,$$

где

$$\mathbf{f} = (\rho, u, p)^T$$

$$\text{при } u \geq 0: \quad \mathbf{G}^- = -c\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}^+ = \mathbf{G} - \mathbf{G}^-,$$

$$\text{при } u < 0: \quad \mathbf{G}^+ = c\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}^- = \mathbf{G} - \mathbf{G}^+;$$

\mathbf{G} определено в (91).

На рис. 22 показаны результаты расчета (задачи о работе ударной трубы) по схеме 2 в сравнении с точным решением. Следует обратить внима-

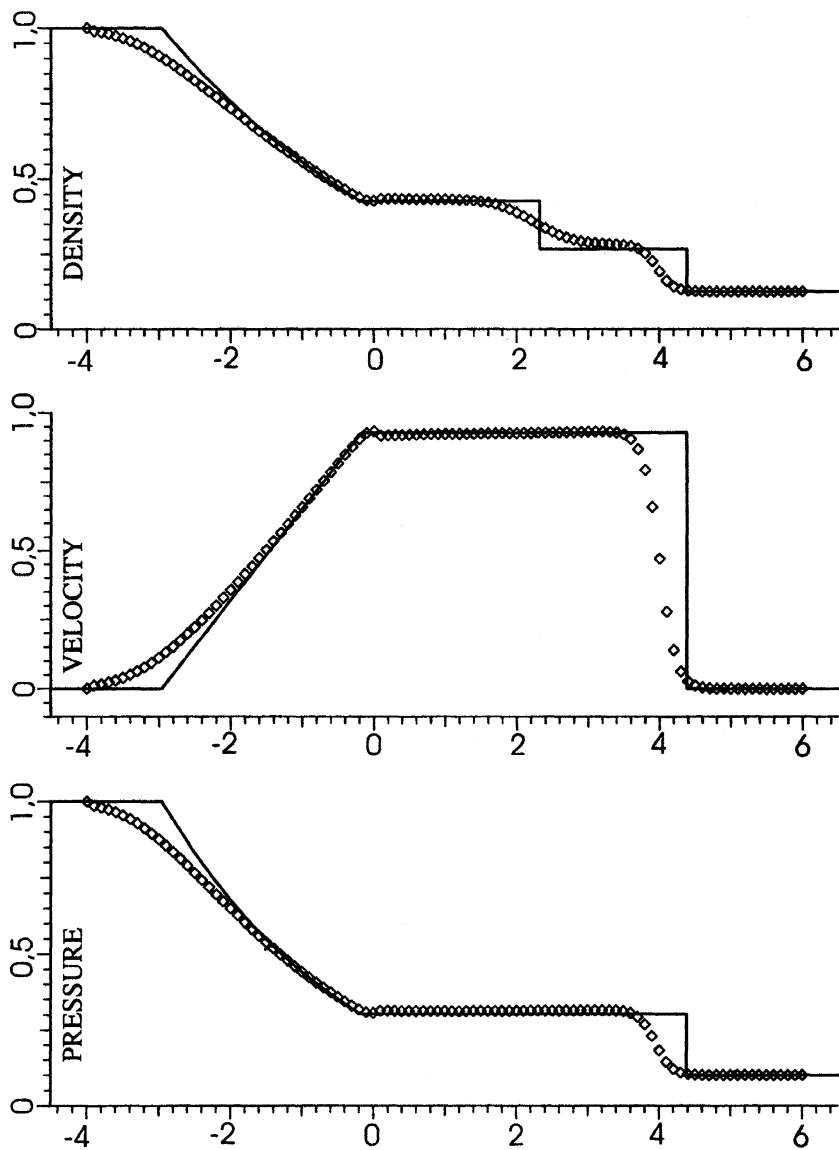


Рис. 22

ние на точность, с которой схема передает параметры газа в волне разрежения и на участках постоянного решения, на то, как она предсказывает положения разрывов и на сколько узлов "размазывает" их фронты. Как видно из рисунка, положение ударной волны, скажем, в точном и численном решениях отличается существенно. Не является ли это в какой-то мере результатом того, что при построении схемы использовались уравнения для неконсервативных переменных? Проверим, что получится, если построить конечно-разностную схему исходя из уравнений в форме (88). Тот же путь, что привел нас к схеме 2, дает нам в этом случае следующее.

Схема 5

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + (A^+)_j \Lambda_- U_j^n + (A^-)_j \Lambda_+ U_j^n = 0, \quad (120)$$

где

$$U = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \\ A^\pm = R D^\pm L, \quad D^\pm = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm),$$

$$d_k^\pm = \frac{1}{2}(a_k \pm |a_k|),$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c,$$

R и **L** определены в (99) и (98).

Из рис. 23 видно, что о расчете по схеме 5 нельзя сказать, что он заметно точнее расчета по схеме 2.

Представим уравнения (120) в виде, который подскажет нам, в чем недостаток схемы 5 и как его исправить.

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{(A_j^+ U_j + A_j^- U_{j+1}) - (A_j^+ U_{j-1} + A_j^- U_j)}{h} = 0. \quad (121)$$

Введем обозначения

$$F_{j,j-1/2} = A_j^+ U_{j-1} + A_j^- U_j, \\ F_{j,j+1/2} = A_j^+ U_j + A_j^- U_{j+1}, \quad (122)$$

перепишем (121) в виде

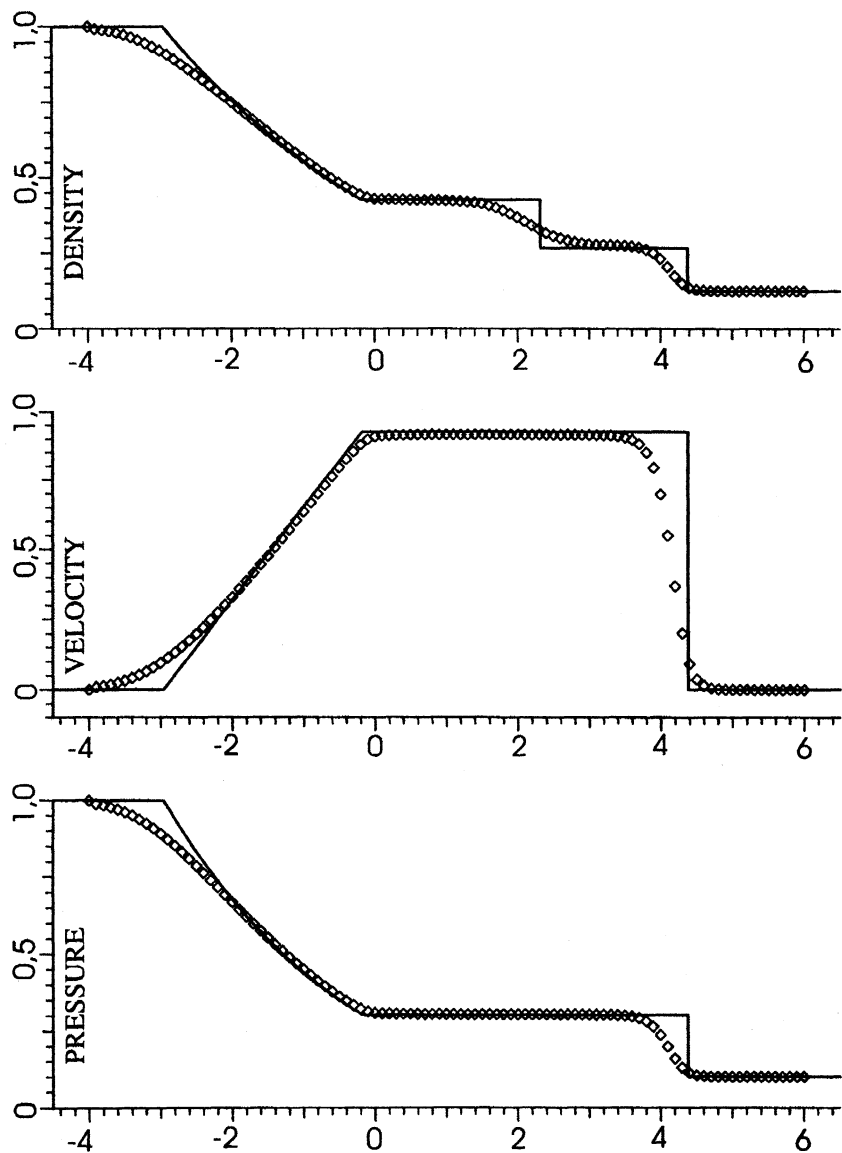


Рис. 23

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{F_{j,j+1/2} - F_{j,j-1/2}}{h} = 0 \quad (123)$$

и, глядя одновременно на рис. 24 и на (123), поймем, что равенство (123) можно рассматривать как балансовое соотношение для интервала $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, согласно которому приращение величины U в узле j за промежуток времени $\tau = t_{n+1} - t_n$ равно разности потоков $F_{j,j+1/2}$ и $F_{j,j-1/2}$ через границы интервала.

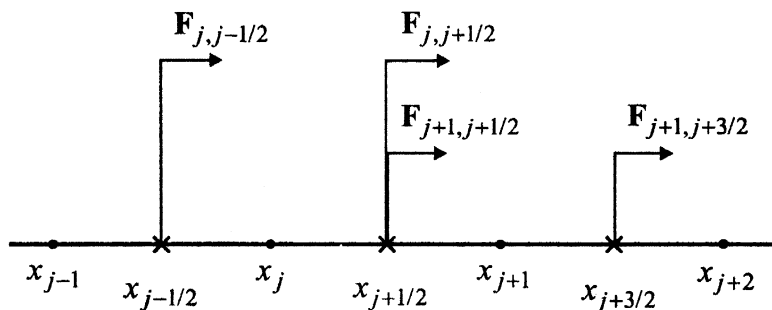


Рис. 24

Записывая (123) для узла x_{j+1} , получим аналогичное балансовое соотношение для интервала $[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}]$:

$$\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n}{\tau} + \frac{F_{j+1,j+3/2} - F_{j+1,j+1/2}}{h} = 0. \quad (124)$$

Сравнение (123) и (124) позволяет увидеть, в чем заключается недостаток схемы 5: с одной стороны, (123) утверждает, что поток через границу $x_{j+1/2}$ равен $F_{j,j+1/2}$, с другой стороны, согласно (124) поток через эту границу равен $F_{j+1,j+1/2}$, хотя в общем случае $F_{j,j+1/2} \neq F_{j+1,j+1/2}$. Схема 5 не обладает свойством консервативности.

Устранить этот недостаток можно следующим образом. Определим в середине интервала $[x_j, x_{j+1}]$ величину $F_{j+1/2}$, которую будем называть *численным потоком*, и будем использовать ее как в уравнении, записанном для узла x_{j+1} , так и в уравнении, записанном для узла x_j . В результате получается схема

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{h} = 0. \quad (125)$$

При суммировании уравнений (125) по j численные потоки $F_{j+1/2}$ во внутренних интервалах сокращаются, схема является консервативной по построению.

Чтобы схема (125) аппроксимировала уравнения (86) хотя бы с первым порядком, потоки $F_{j+1/2}$ должны удовлетворять равенству

$$\frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{h} = \frac{\partial F}{\partial x} + O(h^m), \quad m \geq 1.$$

Потоки $F_{j+1/2}$ необходимо выразить через известные значения функций в целых узлах. Здесь мы ограничимся случаем, когда для вычисления потока $F_{j+1/2}$ используются величины только из двух ближайших узлов:

$$F_{j+1/2} = \tilde{F}(U_j, U_{j+1}).$$

Функция \tilde{F} должна удовлетворять так называемому условию совместности:

$$\tilde{F}(U, U) = F(U).$$

Что касается конкретного вида функции \tilde{F} , то немедленно приходящий в голову вариант типа

$$\tilde{F}(U_j, U_{j+1}) = \frac{1}{2} (F(U_j) + F(U_{j+1}))$$

оказывается непригодным из-за неустойчивости получающейся схемы.

Для того чтобы схема была устойчивой, при вычислении потоков $F_{j+1/2}$ следует, как и прежде, учитывать направления распространения информации, знаки собственных чисел. Представим $F_{j+1/2}$ в виде суммы двух слагаемых: $F_{j+1/2} = F_{j+1/2}^+ + F_{j+1/2}^-$, где слагаемое $F_{j+1/2}^+$ соответствует характеристикам с положительным наклоном, т. е. положительным собственным числам, а слагаемое $F_{j+1/2}^-$ соответствует характеристикам с отрицательным наклоном. Вот примеры такого представления:

$$F_{j+1/2} = A_{j+1/2}^+ U_j + A_{j+1/2}^- U_{j+1},$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1}. \quad (126)$$

Устойчивость, условная конечно, схем вида (125) при указанном способе вычисления потоков $\mathbf{F}_{j+1/2}$ объясняется тем, что по своей сути он совпадает со способом, применявшемся при построении схемы 5: информация, переносимая волнами, движущимися в положительном (отрицательном) направлении, берется из узла, расположенного слева (справа). Выражения для потоков (126) имеют симметричную структуру и совпадают с (122) в случае постоянной матрицы \mathbf{A} .

Схема 6

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n}{h} = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T,$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{A}_{j+1/2}^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1/2}^- \mathbf{U}_{j+1},$$

$$\mathbf{A}^\pm = \mathbf{R} \mathbf{D}^\pm \mathbf{L}, \quad \mathbf{D}^\pm = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm),$$

$$d_k^\pm = \frac{1}{2}(a_k \pm |a_k|),$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c,$$

$$\mathbf{A}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{A}^\pm(\mathbf{f}_{j+1/2}), \quad \mathbf{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{j+1}), \quad \mathbf{f} = (\rho, u, p)^T,$$

\mathbf{R} и \mathbf{L} определены в (99) и (98).

Схема 7 (Годунов — Van Leer)

Отличается от схемы 6 способом усреднения матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{A}^\pm(\mathbf{U}_{j+1/2}), \quad \mathbf{U}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j+1}).$$

Схема 8 (Steger — Warming)

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n}{h} = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T,$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1},$$

$$\mathbf{A}^\pm = \mathbf{R} \mathbf{D}^\pm \mathbf{L}, \quad \mathbf{D}^\pm = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm),$$

$$d_k^\pm = \frac{1}{2} (a_k \pm |a_k|),$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c,$$

\mathbf{R} и \mathbf{L} определены в (99) и (98).

Результаты расчета по схеме 6 показаны на рис. 25. Положение ударной волны предсказывается заметно лучше, чем схемой 5. Однако фронт волны по-прежнему сильно "размазан", что свойственно конечно-разностным схемам первого порядка точности.

Схема 9

Отличается от схемы 6 способом вычисления потока:

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1}) - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{j+1/2}| (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j), \quad (127)$$

где модуль матрицы \mathbf{A} находится следующим образом:

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{R} |\mathbf{D}| \mathbf{L} = \mathbf{R} (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-) \mathbf{L} = \mathbf{R} \mathbf{D}^+ \mathbf{L} - \mathbf{R} \mathbf{D}^- \mathbf{L} = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-,$$

$$|\mathbf{D}| = \text{diag}(|a_1|, |a_2|, |a_3|).$$

Выражение для потока (127) можно получить из соответствующего выражения для схемы 8:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_j \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{U}_{j+1}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{A}_j^+ - \mathbf{A}_j^-) \mathbf{U}_j - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{j+1}^+ - \mathbf{A}_{j+1}^-) \mathbf{U}_{j+1} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1}) - \frac{1}{2} (|\mathbf{A}_{j+1}| \mathbf{U}_{j+1} - |\mathbf{A}_j| \mathbf{U}_j). \end{aligned}$$

Приближенная замена $|\mathbf{A}_{j+1}| \mathbf{U}_{j+1} - |\mathbf{A}_j| \mathbf{U}_j$ на $|\mathbf{A}_{j+1/2}| (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j)$ и приводит к (127).

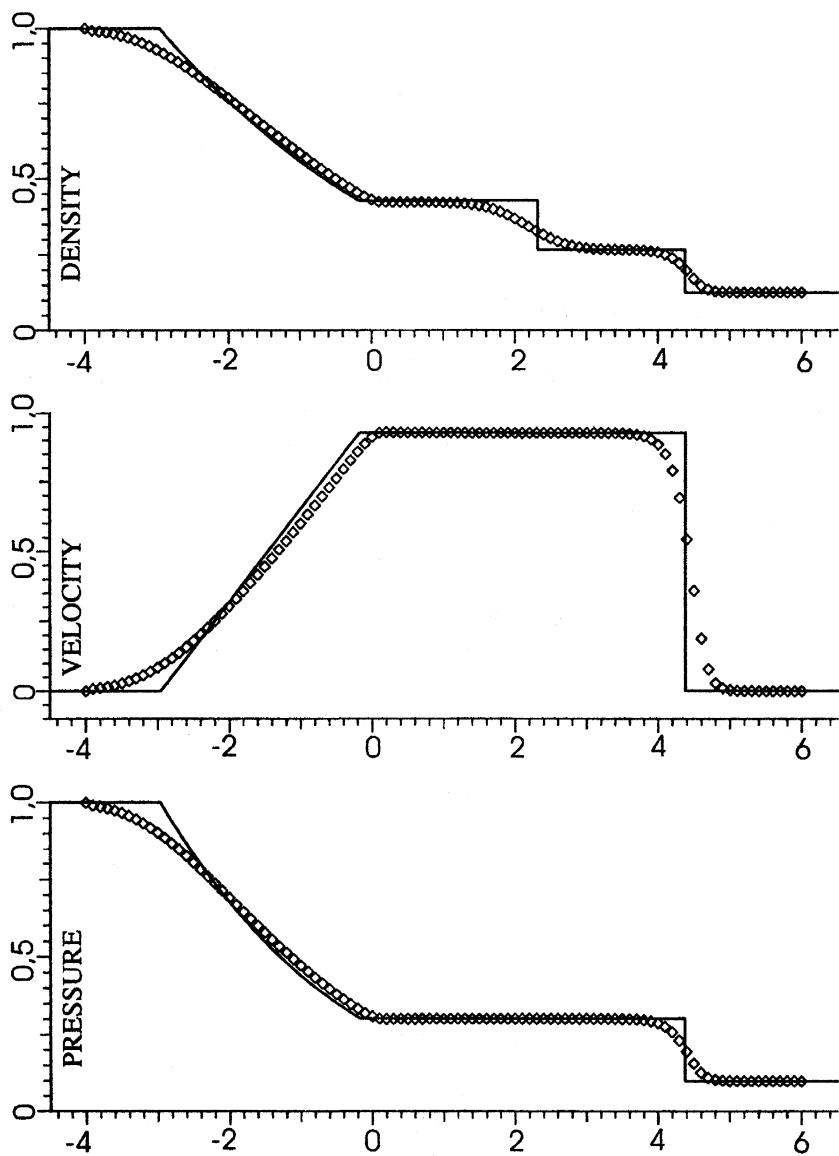


Рис. 25

Схема 10 (Годунов)

Будем считать, что функция U является кусочно-постоянной, т. е. на каждом из интервалов $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ она имеет свое постоянное значение U_j , а в точках $x_{j+1/2}$ терпит разрыв. Решив задачу о распаде разрыва с начальными данными

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_j, & x < x_{j+1/2} \\ U_{j+1}, & x > x_{j+1/2} \end{cases},$$

найдем поток F в точке $x_{j+1/2}$ при $t > 0$. Обозначим этот поток $F(x_{j+1/2}, t, U_j, U_{j+1})$ и будем использовать его в конечно-разностной схеме

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n}{h} = 0,$$

где

$$F_{j+1/2}^n = F(x_{j+1/2}, t, U_j^n, U_{j+1}^n).$$

Решение задачи о распаде произвольного разрыва (подробности см. в [3]) требует выполнения логических операций и в общем случае — решения нелинейного уравнения каким-либо итерационным методом.

Схема 11 (P.L.Roe)

Как и в схеме Годунова, будем считать функцию U кусочно-постоянной и для вычисления потока в точке $x_{j+1/2}$ решать задачу о распаде разрыва с соответствующими начальными данными. Существенным отличием, однако, будет то, что задачу о распаде разрыва будем решать не для уравнений газовой динамики, а для *линейных уравнений, которые аппроксимируют уравнения газовой динамики*. При таком подходе итераций не требуется, задача о распаде разрыва решается точно. Расплатой за приобретаемую экономичность, если не принимать специальных мер, является возможность появления физически некорректных решений.

Итак, предположим, что все собственные числа постоянной матрицы $\hat{A}_{j+1/2}$ действительны и собственные векторы линейно независимы. Решим задачу о распаде разрыва в точке $x_{j+1/2}$ для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \hat{A}_{j+1/2} \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (128)$$

(Для постоянной матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$ задача о распаде разрыва решается просто: можно, например, перейти к инвариантам Римана — и система распадается на три независимых скалярных уравнения переноса, решение каждого из которых есть начальный профиль, перемещающийся с соответствующей постоянной скоростью; затем надо не забыть вернуться к исходным переменным.) В результате получим, что поток в точке $x_{j+1/2}$ равен

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2} = \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+ \mathbf{U}_j + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \mathbf{U}_{j+1},$$

а поток внутрь интервала $[x_j, x_{j+1/2}]$ равен

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \mathbf{U}_j - (\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+ \mathbf{U}_j + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \mathbf{U}_{j+1}) = \\ = -\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j). \end{aligned} \quad (129)$$

Аналогично решим задачу о распаде разрыва в точке $x_{j-1/2}$ для уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

и найдем, что поток внутрь интервала $[x_{j-1/2}, x_j]$ равен

$$-\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1}).$$

Поток внутрь интервала $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ находится суммированием:

$$-\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1}) - \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j).$$

Получается схема

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1}) + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j)}{h} = 0. \quad (130)$$

В работе [13] предлагается строить матрицу $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$ так, чтобы для произвольных \mathbf{U}_j и \mathbf{U}_{j+1} выполнялось соотношение

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \cdot (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j. \quad (131)$$

Оказывается, что матрицу с таким свойством можно получить из матрицы

$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$, вычислив элементы последней через величины, найденные следующим образом:

$$\hat{u}_{j+1/2} = \frac{u_j \sqrt{\rho_j} + u_{j+1} \sqrt{\rho_{j+1}}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}},$$

$$\hat{H}_{j+1/2} = \frac{H_j \sqrt{\rho_j} + H_{j+1} \sqrt{\rho_{j+1}}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}},$$

где, напомним, $H = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2}$, $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$.

Благодаря свойству (131) схема (130) обладает способностью распознавать ударные волны. Это означает, что если состояния \mathbf{U}_j и \mathbf{U}_{j+1} разделены ударной волной, то решение задачи о распаде разрыва для уравнений (128) дает точно такое же значение потока внутри интервала $[x_j, x_{j+1/2}]$, что и решение задачи о распаде разрыва для уравнений газовой динамики. Чтобы убедиться в этом, сначала заметим, что для уравнений газовой динамики поток внутри интервала $[x_j, x_{j+1/2}]$ равен $-(\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j)$, если ударная волна движется влево, и нулю в противном случае. Теперь найдем аналогичный по смыслу поток (129) для уравнений (128). Сравнивая (131) и соотношение на ударной волне (96)

$$\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j = D(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j),$$

приходим к выводу, что $(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j)$ — собственный вектор матрицы

$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$, а D — соответствующее ему собственное число. Учитывая равенство

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^+(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^-(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j)$$

и то, что $(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j)$ — собственный вектор матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$, заключаем, что либо

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^-(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j),$$

либо

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^-(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = 0.$$

Первый вариант имеет место, когда скорость ударной волны отрицательная, второй — в противном случае. Таким образом,

$$-\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \cdot (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \begin{cases} -(\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j), & D < 0 \\ 0, & D \geq 0 \end{cases}$$

что в точности совпадает с результатом для уравнений газовой динамики.

Можно ли представить схему (130) в форме (125)? Попробуйте ответить на этот вопрос сами.

§3. Схема Лакса – Вендроффа

Для построения схемы второго порядка аппроксимации возьмем уравнения газовой динамики в форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (132)$$

и заменим производные на конечные разности по формулам

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} = \mathbf{U}_t + \frac{\tau}{2} \mathbf{U}_{tt} + O(\tau^2), \quad (133)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_{j-1}^n}{2h} = \mathbf{F}_x + O(h^2).$$

В результате получится схема второго порядка аппроксимации по x , но только первого порядка по τ . Поэтому изменим формулу (133) таким образом, чтобы ее погрешность не содержала слагаемого первого порядка $\frac{\tau}{2} \mathbf{U}_{tt}$. Для этого найдем \mathbf{U}_{tt} , продифференцировав уравнение (132) по t :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = \mathbf{U}_{tt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = \mathbf{U}_{tt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right) = \\ &= \mathbf{U}_{tt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) = \mathbf{U}_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = \mathbf{U}_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{U}_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right). \quad (134)$$

Аппроксимируя правую часть в (134) по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \left(\mathbf{A}_{j+1/2} \frac{\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j}{h} - \mathbf{A}_{j-1/2} \frac{\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{j-1}}{h} \right) + O(h^2),$$

получаем для производной по времени формулу второго порядка на решении:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} - \frac{\tau}{2h^2} \left(\mathbf{A}_{j+1/2} (\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j) - \mathbf{A}_{j-1/2} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{j-1}) \right).$$

Это дает нам схему.

Схема 12 (Лакс – Вендрофф)

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_{j-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2h^2} \left(\mathbf{A}_{j+1/2} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n) - \mathbf{A}_{j-1/2} (\mathbf{F}_j^n - \mathbf{F}_{j-1}^n) \right) = 0, \quad (135)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{j+1/2} = \mathbf{A}_{j+1/2}(\mathbf{f}_{j+1/2}), \quad \mathbf{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_j + \mathbf{f}_{j+1}), \quad \mathbf{f} = (\rho, u, p)^T,$$

матрица \mathbf{A} определена в (89).

Схема Лакса – Вендроффа (135) может быть представлена в виде

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n),$$

где

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1} - \frac{\tau}{h} \mathbf{A}_{j+1/2} (\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j) \right\},$$

или приблизительно,

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1} - \frac{\tau}{h} (\mathbf{A}_{j+1/2})^2 (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) \right\}.$$

Усреднение матрицы \mathbf{A} может быть произведено и другими способами, например

$$\mathbf{A}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_j + \mathbf{A}_{j+1}).$$

Исследуйте устойчивость схемы (135) спектральным методом (предположив, что матрица \mathbf{A} постоянна) и получите необходимое условие устойчивости

$$\max_k \left| a_k \frac{\tau}{h} \right| \leq 1.$$

Теперь запрограммируйте схему Лакса – Вендроффа и попробуйте провести расчет задачи о работе ударной трубы. Если созданная вами программа не содержит ошибок, расчет вам провести вряд ли удастся. Дело в том, что схеме Лакса – Вендроффа, как схеме второго порядка, свойственны осцилляции — настолько сильные, что во многих случаях она совсем не пригодна для расчетов.

Добавим в схему искусственную вязкость Лапидуса [16], которая имеет третий порядок и может быть добавлена в любую схему. Делается это следующим образом. Если $\tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1}$ — решение, полученное по какой-либо схеме, то надо пересчитать его по формуле

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} + \chi \frac{\tau}{h} \left((d\tilde{\mathbf{U}})_{j+1/2}^{n+1} - (d\tilde{\mathbf{U}})_{j-1/2}^{n+1} \right),$$

где

$$(d\tilde{\mathbf{U}})_{j+1/2}^{n+1} = \left| \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}^{n+1} - \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} \right| \left(\tilde{\mathbf{U}}_{j+1}^{n+1} - \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} \right),$$

а χ — некоторый положительный коэффициент. Борьба с осцилляциями при помощи искусственной вязкости не лишена общего для подобных методов недостатка: величину коэффициента χ необходимо подбирать опытным путем.

На рис. 26 показаны результаты расчета по схеме 12 с $\chi = 2$. Видно, что в сравнении со схемами первого порядка профиль ударной волны, как и контактного разрыва, стал более крутым. Видно также, что полностью избежать осцилляций не удалось.

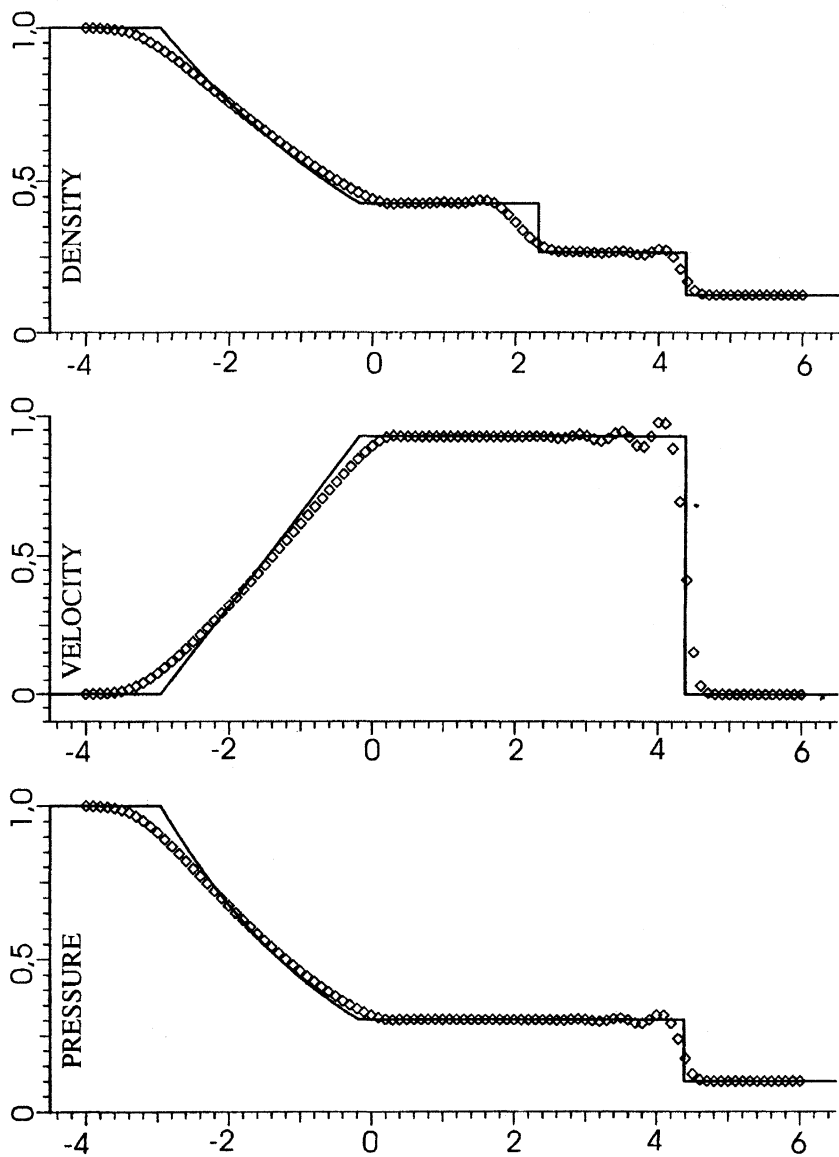


Рис. 26

Схема 13 (Лакс – Вендрофф, двухшаговая)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0,$$

где

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = F(U_{j+1/2}^{n+1/2});$$

$U_{j+1/2}^{n+1/2}$ предварительно находится из уравнения

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_j^n)}{\tau/2} + \frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{h} = 0$$

Схема 14 (Маккормак)

$$\frac{\tilde{U}_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{h} = 0,$$

$$\frac{\tilde{\tilde{U}}_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{\tilde{F}_j^{n+1} - \tilde{F}_{j-1}^{n+1}}{h} = 0, \text{ где } \tilde{F}_j^{n+1} = F(\tilde{U}_j^{n+1}),$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\tilde{\tilde{U}}_j^{n+1} + \tilde{U}_j^{n+1}),$$

Схемы 13 и 14 имеют второй порядок и эквивалентны схеме Лакса – Вендроффа для линейных уравнений с постоянной матрицей ($F = AU$, $A = const$). В нелинейном случае обе они проще схемы Лакса – Вендроффа, так как не требуют вычисления матрицы A .

Результаты расчета по схеме 13 показаны на рис. 27. Для их получения в схему не пришлось добавлять искусственную вязкость. Но это не означает, что схема способна противостоять осцилляциям. Не усилятся ли осцилляции при уменьшении или увеличении τ ? Можете проверить.

§4. TVD-модификация схемы Лакса – Вендроффа

Следует подчеркнуть, что понятие TVD-схемы, как и монотонной схемы, определено только для нелинейного скалярного закона сохранения и для гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами. В случае системы нелинейных законов сохранения полная вариация реше-

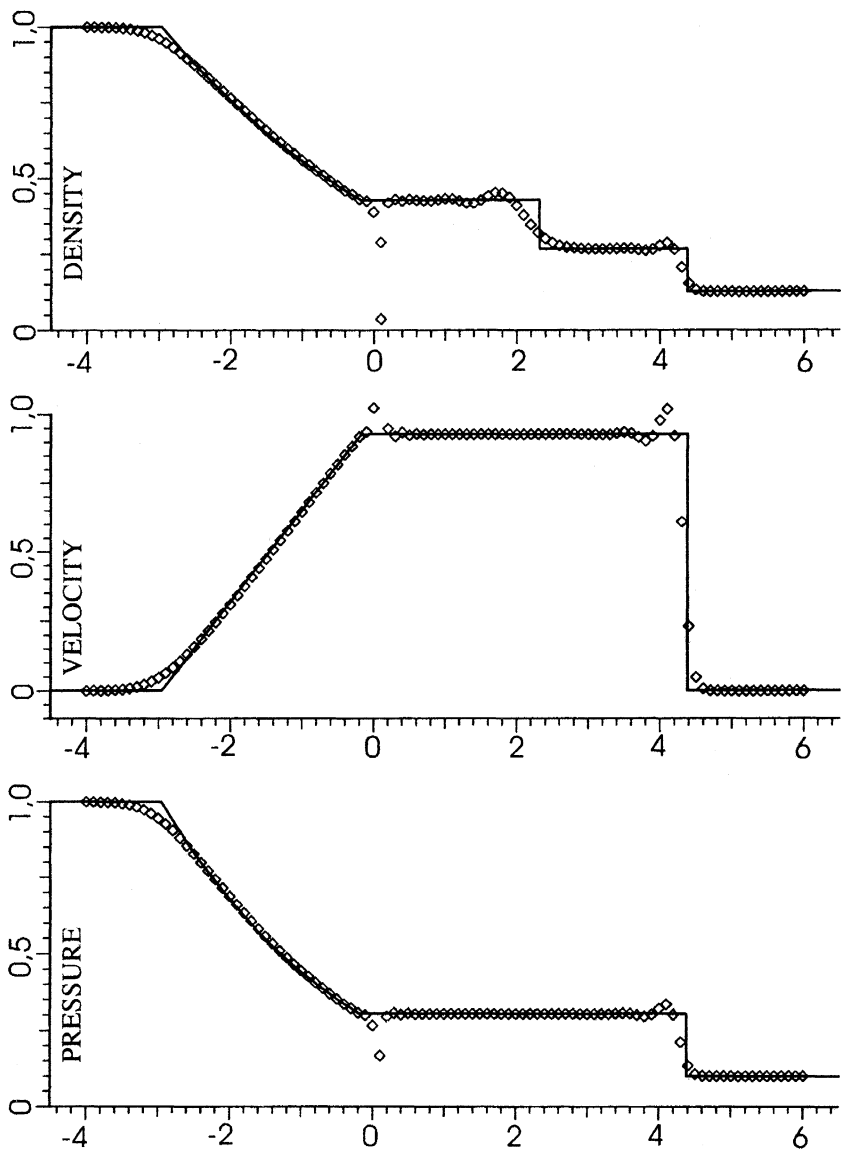


Рис. 27

ния может в действительности возрастать при взаимодействии волн. Обобщение TVD-схемы на систему уравнений газовой динамики не является теоретически строгим и осуществляется путем сведения системы уравнений к независимым скалярным уравнениям (что может быть сделано лишь приблизительно, в предположении о "локально замороженных" постоянных коэффициентах); затем к каждому из скалярных уравнений применяется нелинейная TVD-схема, после чего делается обратный переход к исходным независимым переменным. Практика показывает, что построенные таким образом схемы позволяют получать численные решения, в которых совсем отсутствуют или есть только умеренные осцилляции.

Итак, преобразуем систему уравнений газовой динамики к характеристической форме (предполагая, что матрица \mathbf{L} постоянна!):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 &\rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{RDL} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{DL} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{LU}$, $\mathbf{U} = \mathbf{RW}$. Последняя система уравнений представляет собой три независимых скалярных уравнения:

$$\frac{\partial W^k}{\partial t} + a^k \frac{\partial W^k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (136)$$

Для каждого из уравнений (136) запишем TVD-схему (мы знаем, как это делается в скалярном случае):

$$\begin{aligned} (W^k)_j^{n+1} = (W^k)_j^n - \lambda \left\{ \left[\frac{1}{2} (\phi_{j+1}^k + \phi_j^k) - \frac{1}{2} d_{j+1/2}^k \Delta_{j+1/2} W^k \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2} (\phi_{j-1}^k + \phi_j^k) - \frac{1}{2} d_{j-1/2}^k \Delta_{j-1/2} W^k \right] \right\}. \quad (137) \end{aligned}$$

В (137) использованы следующие обозначения:

$$\lambda = \frac{\tau}{h}, \quad \phi_j^k = a_j^k W_j^k, \quad \Delta_{j+1/2} W = W_{j+1} - W_j,$$

$$d_{j+1/2}^k = \lambda \left| a_{j+1/2}^k \right|^2 Q_{j+1/2}^k + \left| a_{j+1/2}^k \right| \left(1 - Q_{j+1/2}^k \right).$$

Функция-ограничитель $Q_{j+1/2}^k$ зависит от двух аргументов:

$$Q_{j+1/2}^k = Q_{j+1/2}^k \left(\left(s_{j+1/2}^k \right)^-, \left(s_{j+1/2}^k \right)^+ \right),$$

$$\left(s_{j+1/2}^k\right)^- = \frac{\Delta_{j-1/2} W^k}{\Delta_{j+1/2} W^k}, \quad \left(s_{j+1/2}^k\right)^+ = \frac{\Delta_{j+3/2} W^k}{\Delta_{j+1/2} W^k}$$

($Q_{j+1/2}^k$ может быть своей для каждого "псевдоинварианта" W^k). Для возвращения к вектору переменных \mathbf{U} умножим уравнения (137) слева на матрицу \mathbf{R} и получим схему.

Схема 15 (Лакс – Вендрофф, TVD-модификация)

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right),$$

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_{j+1} + \mathbf{F}_j - \mathbf{R}_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} \right), \quad \Phi = \left(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3 \right)^T,$$

$$\Phi_{j+1/2}^k = \frac{\tau}{h} \left| a_{j+1/2}^k \right|^2 \Delta_{j+1/2} \Psi^k + g \left(a_{j+1/2}^k \right) \left(\Delta_{j+1/2} W^k - \Delta_{j+1/2} \Psi^k \right),$$

$$g(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \varepsilon \\ \frac{z^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & |z| < \varepsilon, \quad \varepsilon = 0,01 \div 0,2, \end{cases}$$

$$\Delta_{j+1/2} W^k = \sum_{m=1}^3 (l_{km})_{j+1/2} \left(U_{j+1}^m - U_j^m \right),$$

$$\Delta_{j+1/2} \Psi^k = \min \text{mod} \left(\Delta_{j+1/2} W^k, \Delta_{j-1/2} W^k \right) + \\ + \min \text{mod} \left(\Delta_{j+1/2} W^k, \Delta_{j+3/2} W^k \right) - \Delta_{j+1/2} W^k,$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \cdot \max \left\{ 0, \min(|x|, y \cdot \text{sgn}(x)) \right\},$$

$$a^1 = u - c, \quad a^2 = u, \quad a^3 = u + c,$$

$$\mathbf{L}_{j+1/2} = \mathbf{L} \left(\mathbf{U}_{j+1/2} \right), \quad \mathbf{R}_{j+1/2} = \mathbf{R} \left(\mathbf{U}_{j+1/2} \right),$$

$$\mathbf{U}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{U}_j \right) \text{ или другое усреднение;}$$

матрицы $\mathbf{L} = \{l_{km}\}$ и $\mathbf{R} = \{r_{km}\}$ определены в (98) и (99).

Примечания. Замена $\left| a_{j+1/2}^k \right|$ на $g(a_{j+1/2}^k)$ сделана с целью увеличить диссипативные свойства схемы в точках смены знака собственных чисел $a_{j+1/2}^k$ и противодействовать, таким образом, появлению нефизических решений типа ударных волн разрежения. Функцию **minmod**, может быть, проще определить словами: она равна нулю, если аргументы имеют разные знаки, и равна меньшему по модулю аргументу в противном случае. Для вычисления скорректированных (ограниченных) приращений $\Delta_{j+1/2} \Psi^k$ могут быть использованы и другие формулы.

Результаты расчета по схеме 15 показаны на рис. 28. Осцилляции отсутствуют, и все детали течения предсказаны точнее, чем схемами первого порядка. Справедливости ради надо отметить, что схема 15 не так проста в построении и программировании.

§5. Неявные схемы

Общей чертой всех рассмотренных до сих пор конечно-разностных схем для уравнений газовой динамики является то, что для аппроксимации пространственных производных в них используются известные величины — либо сеточные функции с n -го слоя по времени, либо предварительно найденные промежуточные величины. Как следствие, такие схемы представляют собой явные формулы для нахождения неизвестных величин на $(n+1)$ -м слое.

В неявных схемах, которые можно условно записать в виде

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x} F^{n+1} = 0,$$

пространственные производные аппроксимируются с помощью величин на $(n+1)$ -м слое, поэтому нахождение функций U_j^{n+1} превращается в самостоятельную задачу и требует дополнительных затрат машинного времени при расчете. Необходимость решения системы алгебраических уравнений на каждом шаге по времени является серьезным недостатком неявных схем. Но это не препятствует их практическому применению, так как преимущество, которым они обладают, еще более серьезно.

Превосходство неявных схем заключается в их абсолютной устойчивости. Для скалярного уравнения переноса мы показали, как построить схему,

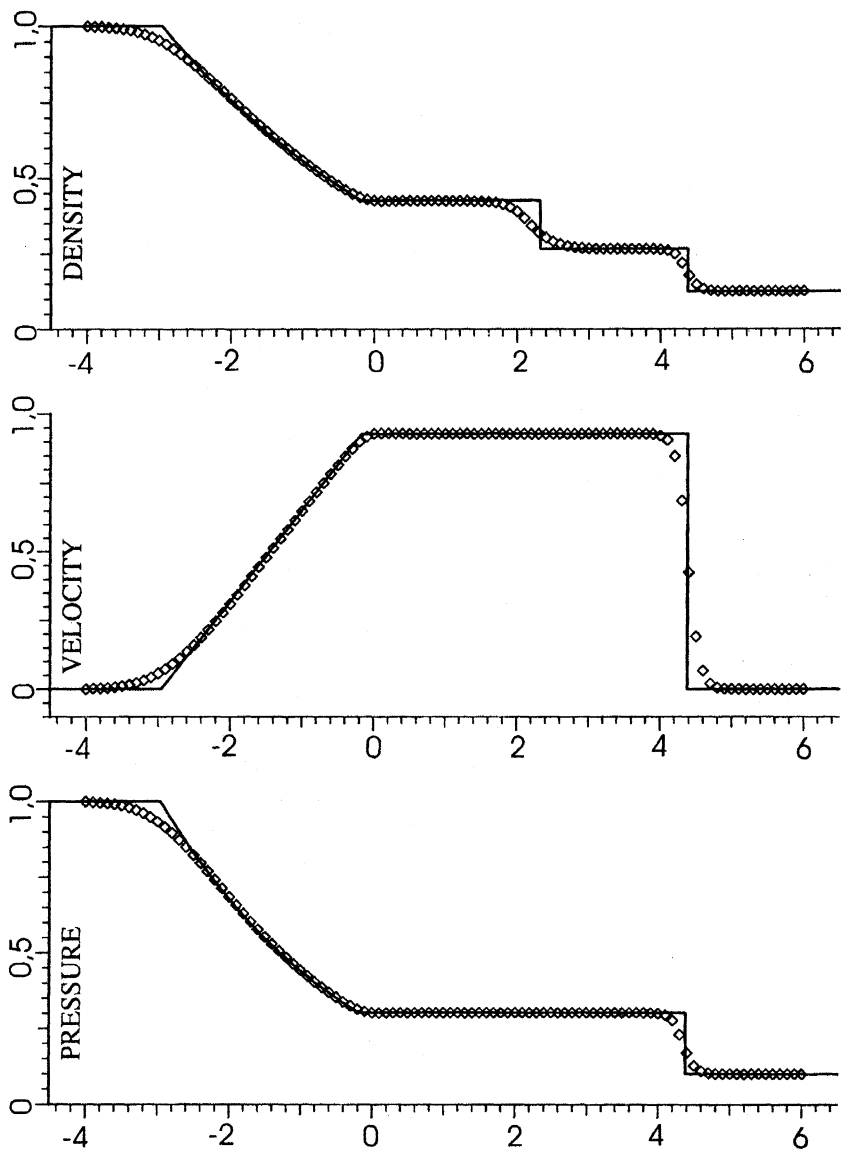


Рис. 28

не имеющую ограничений на τ . Неявные схемы для уравнений газовой динамики, при надлежащей аппроксимации производных по x , тоже позволяют использовать в расчетах шаги по времени, которые во много раз превышают величину, допустимую для явных схем.

Вообще говоря, с уменьшением τ уменьшается погрешность аппроксимации и возрастает точность расчета. Предположим, что для достижения необходимой точности шаг по времени надо взять равным $\tau_{\text{точн}}$ и что $\tau_{\text{точн}} < \tau_{\text{устойч}}$, где $\tau_{\text{устойч}}$ — максимальный τ , допускаемый условием устойчивости для явной схемы. Про такую ситуацию говорят, что требование точности накладывает на τ более жесткое ограничение, чем требование устойчивости. Использовать неявные схемы в таких случаях не имеет смысла, вполне можно обойтись и более простыми явными схемами. Если же более жестким является ограничение на устойчивость, то по мере того как левая часть неравенства $\tau_{\text{точн}} > \tau_{\text{устойч}}$ все более и более превосходит правую, применение неявных схем становится все более и более предпочтительным.

Особенно велико преимущество неявных схем над явными, когда решаются стационарные уравнения методом установления. Метод заключается в том, что для описания не зависящих от времени процессов используются уравнения, в которых производные по времени сохранены. Надо просто находить решение уравнений на все новом и новом слое по времени и делать это до тех пор, пока при достаточно большом $T = n\tau$ искомые функции не прекратят изменяться (установятся) и станут удовлетворять уравнениям без производных по времени. Например, решение уравнений (105) для стационарного течения в канале может быть найдено методом установления с помощью уравнений (104). Чтобы достичь "достаточно большого" T за меньшее число шагов по времени, эти шаги должны быть увеличены, что и позволяют сделать неявные схемы.

Схема 16 (векторная прогонка)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j + \frac{\tau}{h} \left[-\mathbf{A}_{j-1}^+ \mathbf{q}_{j-1} + (\mathbf{A}_j^+ - \mathbf{A}_j^-) \mathbf{q}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{q}_{j+1} \right] = \\ = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n), \end{aligned} \quad (138)$$

где

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n, \quad \mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{j+1/2} &= \mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1}, \\ \mathbf{A}^\pm &= \mathbf{R} \mathbf{D}^\pm \mathbf{L}, \quad \mathbf{D}^\pm = \text{diag}(d_1^\pm, d_2^\pm, d_3^\pm), \\ d_k^\pm &= \frac{1}{2}(a_k \pm |a_k|),\end{aligned}$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c,$$

\mathbf{R} и \mathbf{L} определены в (13) и (12).

Схема 16 является неявным аналогом схемы 8 и может быть получена следующим образом. Сначала в схеме 8 сделаем замену \mathbf{F}^n на \mathbf{F}^{n+1} :

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1}}{h} = 0. \quad (139)$$

Преобразуем уравнение (139)

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) &= -\frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1}), \\ (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) + \frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1}) - \frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n) &= \\ &= -\frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n), \\ (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) + \frac{\tau}{h}[(\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j+1/2}^n) - (\mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j-1/2}^n)] &= \\ &= -\frac{\tau}{h}(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n).\end{aligned} \quad (140)$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1}$, и приближенно полагая, что матрицы \mathbf{A}^+ и \mathbf{A}^- не зависят от времен, найдем

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j+1/2}^n &= \\ &= (\mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1})^{n+1} - (\mathbf{A}_j^+ \mathbf{U}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{U}_{j+1})^n \approx \\ &\approx \mathbf{A}_j^+(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n) + \mathbf{A}_{j+1}^-(\mathbf{U}_{j+1}^{n+1} - \mathbf{U}_{j+1}^n).\end{aligned} \quad (141)$$

Аналогично,

$$\mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \approx \mathbf{A}_{j-1}^+ (\mathbf{U}_{j-1}^{n+1} - \mathbf{U}_{j-1}^n) + \mathbf{A}_j^- (\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n). \quad (142)$$

Обозначим $\mathbf{q}_j = \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n$. Тогда уравнение (140), после подстановок (141) и (142), переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j + \frac{\tau}{h} \left[\mathbf{A}_j^+ \mathbf{q}_j + \mathbf{A}_{j+1}^- \mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{A}_{j-1}^+ \mathbf{q}_{j-1} - \mathbf{A}_j^- \mathbf{q}_j \right] = \\ = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n), \end{aligned}$$

т. е. совпадает с уравнением (138).

Уравнения (138), взятые при различных j , вместе представляют собой систему уравнений, из которой величины \mathbf{q}_j могут быть найдены трехточечной векторной прогонкой. Перепишем их в привычном для скалярного случая виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\tau}{h} \mathbf{A}_{j-1}^+ \right) \mathbf{q}_{j-1} + \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} (\mathbf{A}_j^+ - \mathbf{A}_j^-) \right) \mathbf{q}_j + \left(\frac{\tau}{h} \mathbf{A}_{j+1}^- \right) \mathbf{q}_{j+1} = \\ = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n). \quad (143) \end{aligned}$$

Формулы векторной прогонки для решения уравнений (143) получаются тем же способом, что и в скалярном случае. Надо только не забывать, что векторы \mathbf{q}_j в (143) умножаются слева на матрицы и что прогоночные коэффициенты будут матрицами и векторами. Векторная прогонка требует обращения матриц.

Схема 17 (векторная прогонка)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j + \frac{\tau}{h} \left[\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{j-1}) + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- (\mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j) \right] = \\ = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n), \quad (144) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_j = \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n, \quad \mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \\ \mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1}) - \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}| (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j); \end{aligned}$$

о построении матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ см. в пояснениях к схеме 11, из которой получена схема 17.

Векторная прогонка, применяемая для решения уравнений (144), является методом, который требует немалых затрат машинного времени. Познакомимся с приемом, позволяющим строить более экономичные конечно-разностные схемы. Для удобства представим уравнения (144) в операторном виде

$$\left[\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right) \right] \mathbf{q}_j = -\frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right), \quad (145)$$

где \mathbf{I} — единичный оператор, Δ_- и Δ_+ — разностные операторы:

$$\Delta_- \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{j-1}, \quad \Delta_+ \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{j+1} - \mathbf{q}_j.$$

Оператор $\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right)$ в (145) называется *стабилизирующим оператором*. Вычисления по разностной схеме упростятся, если стабилизирующий оператор заменить на произведение более простых операторов:

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right). \end{aligned} \quad (146)$$

Замена (146) не является точной и называется *приближенной факторизацией* стабилизирующего оператора.

Схема 18 (бегущий счет)

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right) \mathbf{q}_j \\ & = -\frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right); \end{aligned}$$

все остальное — как в схеме 17.

Вычисления в схеме 18 выполняются в два этапа. Сначала из уравнения

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- \right) \tilde{\mathbf{q}}_j = -\frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right) \quad (147)$$

находятся вспомогательные величины $\tilde{\mathbf{q}}_j$. Затем из уравнения

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right) \mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_j \quad (148)$$

находятся величины $\tilde{\mathbf{q}}_j$ (а после этого и искомые функции на $(n+1)$ -м слое: $\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n + \mathbf{q}_j$).

Чтобы решить уравнения (147) и (148), прогонка не требуется. Действительно, переписав уравнения (147) несколько иначе, а именно

$$\tilde{\mathbf{q}}_j + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ (\tilde{\mathbf{q}}_j - \tilde{\mathbf{q}}_{j-1}) = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n),$$

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \right) \tilde{\mathbf{q}}_j - \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \tilde{\mathbf{q}}_{j-1} = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n),$$

видим, что векторы $\tilde{\mathbf{q}}_j$ могут быть найдены последовательно при все большем и большем значении индекса j по формуле

$$\tilde{\mathbf{q}}_j = \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \right)^{-1} \frac{\tau}{h} \left[\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \tilde{\mathbf{q}}_{j-1} - (\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n) \right]. \quad (149)$$

Вектор $\tilde{\mathbf{q}}_j$ при самом маленьком значении индекса j , т. е. на границе расчетной области, предполагается известным из граничных условий, что позволяет начать расчет по формуле (149).

Аналогичным образом находятся величины \mathbf{q}_j из соотношений (148), с той лишь разницей, что счет ведется в сторону уменьшения индекса j .

Стабилизирующий оператор схемы 17 может быть приближенно факторизован и другими способами, например

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \Delta_- + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \Delta_+ \right) = \\ & = \mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ - \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \right) - \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ T^{-1} + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- T = \\ & = \Omega_j - \frac{\tau}{h} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ T^{-1} + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- T \rightarrow \\ & \rightarrow \Omega_j \left(\mathbf{I} - \frac{\tau}{h} \Omega_j^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ T^{-1} \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \Omega_j^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- T \right), \quad (150) \end{aligned}$$

где

$$\Omega_j = \mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ - \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \right),$$

T и T^{-1} — операторы сдвига:

$$T\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{j+1}, \quad T^{-1}\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{j-1}.$$

При факторизации (150) схема 17 превращается в схему 19, которую сразу запишем в виде двух шагов.

Схема 19 (бегущий счет)

$$\Omega_j \left(\mathbf{I} - \frac{\tau}{h} \Omega_j^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ T^{-1} \right) \tilde{\mathbf{q}}_j = -\frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right),$$

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \Omega_j^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- T \right) \mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_j,$$

где

$$\Omega_j = \mathbf{I} + \frac{\tau}{h} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ - \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \right);$$

все остальное — как в схеме 17.

Формулы бегущего счета для схемы 19 записываются следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{q}}_j = \Omega_j^{-1} \frac{\tau}{h} \left[\hat{\mathbf{A}}_{j-1/2}^+ \tilde{\mathbf{q}}_{j-1} - \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n \right) \right],$$

$$\mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_j - \frac{\tau}{h} \Omega_j^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}^- \mathbf{q}_{j+1}.$$

Далее мы покажем, как построить неявную абсолютно устойчивую схему, стабилизирующий оператор которой можно приближенно факторизовать таким образом, что для применения схемы потребуются только скалярные прогонки. Но прежде сделаем паузу и отметим несколько моментов, которые не следует обходить вниманием при оценке суммарного эффекта факторизации на свойства схемы. Безусловно положительным результатом факторизации является упрощение вычислений и снижение затрат машинного времени на проведение расчета — собственно ради этого факторизация и делается. Для одномерных уравнений экономия может оказаться не очень заметной, в чем вы можете убедиться практически, сравнив работу схем 17 и 18. Зато в многомерном случае выигрыш настолько существен,

что не будет большим преувеличением сказать: только благодаря факторизации (или сходным по сути приемам) расчет и становится возможным.

К сожалению, приближенная факторизация стабилизирующего оператора может иметь и негативные последствия. Факторизованная схема *не совпадает* с исходной, если факторизация *приближенная*, поэтому нет никакой гарантии, что она "наследует" ее безусловную устойчивость. Мы не можем сформулировать сколько-нибудь общие правила, следование которым обеспечивало бы сохранение у факторизованной схемы того же запаса устойчивости, каким обладает исходная схема. Разумным выглядит предположение о том, что чем меньшая погрешность вносится в схему в результате факторизации (т. е. чем меньше факторизованная схема отличается от исходной), тем больше шансов на сохранение устойчивости. Однако основанные на этом предположении выводы не имеют той степени надежности, какую дает непосредственное исследование устойчивости факторизованной схемы одним из известных вам методов.

Погрешность, вносимая при факторизации, может не только подорвать устойчивость схемы, но и замедлить сходимость к стационарному состоянию, если схема применяется для решения стационарных задач. Например, стабилизирующий оператор факторизованной схемы 18 отличается от стабилизирующего оператора исходной схемы 17 на величину

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)^2 \hat{A}_{j-1/2}^+ \Delta_- \hat{A}_{j+1/2}^- \Delta_+. \quad (151)$$

При маленьких τ , когда разница небольшая, исходная и факторизованная схемы ведут себя одинаково: как для той, так и другой скорость сходимости растет с увеличением τ . Однако для решения стационарных задач методом установления выгоднее использовать большие шаги по времени, чтобы за меньшее их число "дошагать" до стационарного состояния. Для факторизованной схемы, начиная с некоторой величины шага по времени, положительный эффект от роста τ нивелируется отрицательным эффектом от увеличения погрешности (151), в результате чего скорость сходимости падает.

Схема 20

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\tau} + u \Lambda \rho_j^{n+1} + \rho \Lambda u_j^{n+1} = 0,$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u \Lambda u_j^{n+1} + \frac{1}{\rho} \bar{\Lambda} \rho_j^{n+1} = 0,$$

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\tau} + \gamma p \Lambda u_j^{n+1} + u \Lambda p_j^{n+1} = 0,$$

$$\text{при } u \geq 0: \Lambda = \Lambda_-, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_+,$$

$$\text{при } u < 0: \Lambda = \Lambda_+, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_-.$$

Неявная схема 20 построена на основе уравнений в недивергентной форме (90) и является абсолютно устойчивой. Расчеты по этой схеме осуществляются с помощью векторных прогонок. Некоторая экономия может быть достигнута, если сначала из двух последних уравнений векторной прогонкой найти u_j^{n+1} и p_j^{n+1} , а затем из первого уравнения скалярной прогонкой найти ρ_j^{n+1} .

Перепишем схему 20 в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_j^\rho + \tau(u \Lambda q_j^\rho + \rho \Lambda q_j^u) &= -\tau(u \Lambda p_j^n + \rho \Lambda u_j^n), \\ q_j^u + \tau\left(u \Lambda q_j^u + \frac{1}{\rho} \bar{\Lambda} q_j^p\right) &= -\tau\left(u \Lambda u_j^n + \frac{1}{\rho} \bar{\Lambda} p_j^n\right), \\ q_j^p + \tau(\gamma p \Lambda q_j^u + u \Lambda q_j^p) &= -\tau(\gamma p \Lambda u_j^n + u \bar{\Lambda} p_j^n), \end{aligned} \quad (152)$$

где

$$\mathbf{f} = (\rho, u, p)^T, \quad \mathbf{q} = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n, \quad \mathbf{q} = (q^\rho, q^u, q^p).$$

Теперь запишем систему уравнений (152) в операторной форме:

$$(\mathbf{I} + \tau \mathbf{B}) \mathbf{q}_j = -\tau \mathbf{B} \mathbf{f}_j^n, \quad (153)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} u \Lambda & \rho \Lambda & 0 \\ 0 & u \Lambda & \frac{1}{\rho} \bar{\Lambda} \\ 0 & \gamma p \Lambda & u \Lambda \end{pmatrix}. \quad (154)$$

Представим оператор \mathbf{B} в виде суммы двух операторов

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} u\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & u\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & u\Lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho}\bar{\Lambda} \\ 0 & \gamma\rho\Lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (155)$$

Приближенно факторизуем стабилизирующий оператор схемы (153):

$$\mathbf{I} + \tau\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{I} + \tau\mathbf{B}_1)(\mathbf{I} + \tau\mathbf{B}_2).$$

В результате получается схема.

Схема 21

$$(\mathbf{I} + \tau\mathbf{B}_1)\tilde{\mathbf{q}}_j = -\tau\mathbf{B}\mathbf{f}_j^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau\mathbf{B}_2)\mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_j,$$

$$\mathbf{f}_j^{n+1} = \mathbf{f}_j^n + \mathbf{q}_j,$$

где операторы \mathbf{B} , \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 определены в (154), (155);

как и в схеме 20, при $u \geq 0$: $\Lambda = \Lambda_-$, $\bar{\Lambda} = \Lambda_+$,

при $u < 0$: $\Lambda = \Lambda_+$, $\bar{\Lambda} = \Lambda_-$.

С принципами построения и свойствами схем, к которым относится только что приведенная схема, можно познакомиться в монографии [14]. Схема 21 примечательна тем, что, сохранив после факторизации большой запас устойчивости, она сводится к скалярным прогонкам. Применительно к первому дробному шагу, который из-за диагональности оператора $\mathbf{I} + \tau\mathbf{B}_1$ представляет собой три независимых уравнения, утверждение о скалярных прогонках очевидно. Поясним порядок вычислений на втором дробном шаге $(\mathbf{I} + \tau\mathbf{B}_2)\mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_j$, для чего запишем уравнения покомпонентно:

$$\begin{aligned} q_j^p + \tau\rho\Lambda q_j^u &= \tilde{q}_j^p, \\ q_j^u + \tau\frac{1}{\rho}\bar{\Lambda}q_j^p &= \tilde{q}_j^u, \\ q_j^p + \tau\gamma\rho\Lambda q_j^u &= \tilde{q}_j^p. \end{aligned} \quad (156)$$

Подставляя q_j^p из третьего уравнения во второе, получим

$$\begin{aligned} q_j^u + \tau \frac{1}{\rho} \bar{\Lambda} (\tilde{q}_j^p - \tau \gamma p \Lambda q_j^u) &= \tilde{q}_j^u, \\ q_j^u - \tau^2 \frac{\gamma}{\rho} \bar{\Lambda} p \Lambda q_j^u &= \tilde{q}_j^u - \tau \frac{1}{\rho} \bar{\Lambda} \tilde{q}_j^p. \end{aligned} \quad (157)$$

Из уравнения (157) трехточечной скалярной прогонкой находится q_j^u , затем по явным формулам из первого и третьего уравнения (156) находятся q_j^p и q_j^p .

Если схема 21 применяется для нахождения стационарного решения методом установления, то при сходимости получается решение, удовлетворяющее системе разностных уравнений

$$\mathbf{B} \mathbf{f}_j^n = 0. \quad (158)$$

Уравнения (158) аппроксимируют стационарную часть уравнений газовой динамики в недивергентной форме, т. е.

$$\mathbf{B} \mathbf{f}_j^n \approx \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}.$$

Схема 21 не является консервативной при установлении. Поскольку

$$\mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x},$$

где невырожденная матрица \mathbf{S} определена в (92), то в правой части первого дробного шага можно использовать величину, аппроксимирующую

$$\mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}.$$

Схема 22

$$(\mathbf{I} + \tau \mathbf{B}_1) \tilde{\mathbf{q}}_j = -\tau \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda(\rho u)_j^n \\ \Lambda(\rho u^2)_j^n + \bar{\Lambda} p_j^n \\ \Lambda(u(\rho E + p))_j^n \end{pmatrix},$$

все остальное — как в схеме 21.

Стационарное решение, полученное по схеме 22, удовлетворяет конечно-разностным уравнениям, которые аппроксимируют стационарную часть уравнений газовой динамики в дивергентной форме. Для схемы 22 консервативность при установлении нарушается меньше, чем для схемы 21.

Результаты расчета задачи о работе ударной трубы по схеме 21 показаны на рис. 29. Как и следовало ожидать, первый порядок и неконсервативность делают схему непригодной для решения задач подобного сорта. Однако благодаря большому запасу устойчивости схемы 21 и 22 могут быть использованы для расчета гладких стационарных течений.

Найдем погрешность факторизации стабилизирующего оператора в случае, когда операторы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 , на которые расщепляется оператор \mathbf{B} , даются равенствами (155):

$$\tau^2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = \tau^2 \begin{pmatrix} 0 & u\Lambda\rho\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & u\Lambda \frac{1}{\rho\Lambda} \\ 0 & \gamma u\Lambda\rho\Lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (159)$$

В матрице (159) имеется три ненулевых элемента. Оказывается, что существует такое расщепление оператора \mathbf{B} , при котором факторизованная схема по-прежнему абсолютно устойчива в линейном приближении, вычисления по ней требуют только скалярных прогонок, но в матрице $\tau^2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2$ есть лишь один ненулевой элемент.

Схема 23

$$(\mathbf{I} + \tau \mathbf{B}_1) \tilde{\mathbf{q}}_j = -\tau \mathbf{B} \mathbf{f}_j^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau \mathbf{B}_2) \mathbf{q}_j = \tilde{\mathbf{q}}_j,$$

$$\mathbf{f}_j^{n+1} = \mathbf{f}_j^n + \mathbf{q}_j,$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho\Lambda} \\ 0 & \gamma\rho\Lambda & u\Lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} u\Lambda & \rho\Lambda & 0 \\ 0 & u\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (160)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

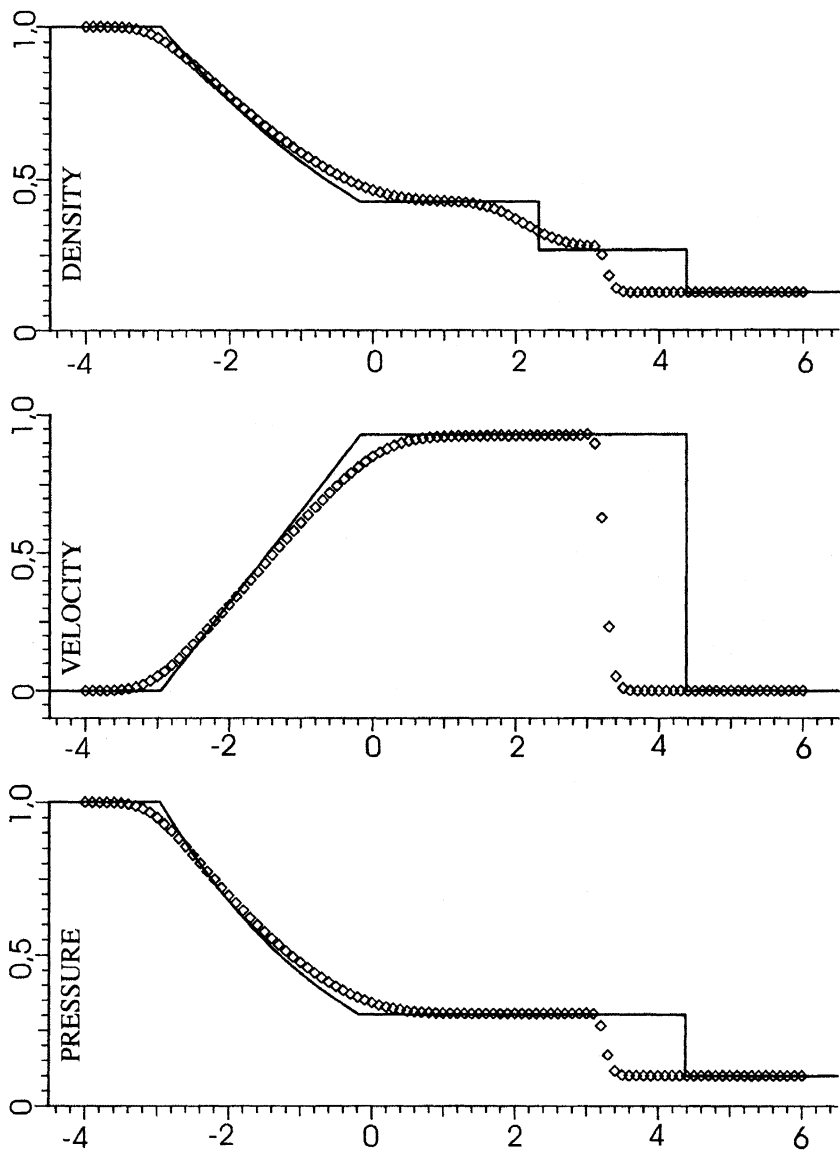


Рис. 29

$$\text{при } u \geq 0: \Lambda = \Lambda_-, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_+,$$

$$\text{при } u < 0: \Lambda = \Lambda_+, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_-.$$

(В правой части первого дробного шага можно использовать аппроксимацию уравнений в дивергентной форме, как в схеме 22.) При расщеплении (160) погрешность факторизации стабилизирующего оператора равна

$$\tau^2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = \tau^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p \Lambda u \Lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Из-за меньшей погрешности факторизации, от схемы 23 следует ожидать большей устойчивости и лучшей сходимости, чем от схемы 21. (Так оно и оказывается в тестовых расчетах стационарного течения в канале переменного сечения.)

При построении неявных схем второго и выше порядка аппроксимации возникает знакомая уже проблема устранения нефизических осцилляций у сеточных функций. Для ее решения используются те же подходы, что применяются при конструировании явных схем, хотя действовать приходится в ситуации, усложненной необходимостью решать систему алгебраических уравнений относительно искомых функций на $(n + 1)$ -м временном слое. Здесь мы приведем только одну неявную схему второго порядка аппроксимации, и это будет неявный вариант схемы Макормака, который для уравнений Навье – Стокса описан в работе [15].

Схема 24 (Макормак, неявная)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_j - \frac{\tau}{h} \left(\mathbf{A}_{j+1} |\tilde{\mathbf{q}}_{j+1} - \mathbf{A}_j |\tilde{\mathbf{q}}_j \right) &= -\frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n \right), \\ \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j^n + \tilde{\mathbf{q}}_j, \\ \tilde{\tilde{\mathbf{q}}}_j + \frac{\tau}{h} \left(\mathbf{A}_j |\tilde{\tilde{\mathbf{q}}}_j - \mathbf{A}_{j-1} |\tilde{\tilde{\mathbf{q}}}_{j-1} \right) &= -\frac{\tau}{h} \left(\tilde{\mathbf{F}}_j^{n+1} - \tilde{\mathbf{F}}_{j-1}^{n+1} \right), \\ \tilde{\tilde{\mathbf{U}}}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j^n + \tilde{\tilde{\mathbf{q}}}_j, \\ \mathbf{U}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\tilde{\mathbf{U}}}_j^{n+1} + \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} \right), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mathbf{F}}_j^{n+1} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1}), \quad |\mathbf{A}| = \mathbf{R}|\mathbf{D}|\mathbf{L},$$

\mathbf{R} и \mathbf{L} определены в (99) и (98),

$$|\mathbf{D}| = \text{diag}(d_1, d_2, d_3), \quad d_k = \max\left\{|a_k| - \frac{h}{\tau}, 0\right\},$$

$$a_1 = u - c, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u + c.$$

§6. Квазиодномерное течение в канале.

Примеры расчетов

Представление о сравнительных достоинствах и недостатках различных конечно-разностных схем будет более точным, если оно основано на результатах расчетов целого ряда тестовых задач. Давайте поэтому сделаем несколько расчетов квазиодномерного стационарного течения в канале переменного сечения. Уравнения (104), описывающие такое течение, несколько отличаются от одномерных уравнений газовой динамики, но это не создает особых проблем для применения рассмотренных выше схем. Дело в том, что почти все отличие исчезает, если перейти к другим независимым переменным:

$$\begin{pmatrix} R \\ U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\rho \\ u \\ Ap \end{pmatrix}.$$

В новых переменных уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(RU) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(RU) + \frac{\partial}{\partial x}(RU^2 + P) &= \frac{P}{A} \frac{dA}{dx}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(RE) + \frac{\partial}{\partial x}(U(RE + P)) &= 0, \end{aligned} \quad (161)$$

$$\text{где } E = \frac{P}{R(\gamma - 1)} + \frac{U^2}{2}.$$

Единственное отличие уравнений (161) от одномерных уравнений газовой динамики состоит теперь в том, что правая часть уравнения движения в

(161) не равна нулю. Для аппроксимации появившегося слагаемого можно использовать центральную разность

$$\left(\frac{P}{A} \frac{dA}{dx} \right)_j = \frac{P_j}{A_j} \frac{A_{j+1} - A_{j-1}}{2h}.$$

Решение стационарных конечно-разностных уравнений мы будем находить методом установления по времени. Для этого метода, как и для любого итерационного метода, надо указать критерий установления, т. е. сформулировать условие, при выполнении которого итерационный процесс можно прекратить, а полученное к этому моменту решение принять за приближенное решение уравнений. Разницу между точным и приближенным решениями оценить трудно, поэтому о сходимости обычно судят по величине невязки. Например, можно задать маленькое положительное число ε и считать решение сошедшимся, если невязка уравнения неразрывности в каждой точке сетки x_j удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\rho_j^n} \left| \frac{\partial}{\partial x} (RU)_j^n \right| < \varepsilon,$$

где под производной в левой части подразумевается ее конечно-разностный аналог — именно тот, что используется в схеме, по которой ведется расчет. Критерий сходимости станет более жестким, если потребовать малость невязок также и в уравнениях движения и энергии.

В качестве начального приближения будем задавать линейное распределение искомых функций, удовлетворяющее граничным условиям.

Параметры тестовой задачи о гладком квазиодномерном течении в канале. Площадь канала изменяется по формуле

$$A(x) = A_* + (1 - A_*) \left(1 - \frac{x}{x_*} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Сечение с минимальной площадью $A_* = A(x_*) = 0,5$ расположено при $x_* = 0,5$. Величины на входе в канал ($x = 0$) и на выходе из канала ($x = 1$) равны

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 1,0000000 \\ 1,0237498 \\ 8,0000000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x=1} = \begin{pmatrix} 0,1933880 \\ 5,2937598 \\ 0,8018469 \end{pmatrix}.$$

На рис. 30 результаты, полученные по схеме 22, сравниваются с точным решением. Для гладкого стационарного течения, как видно, применение неявной схемы расщепления является вполне оправданным. Расчет оказывается не только достаточно точным, но и весьма экономичным, так как использование больших τ приводит к значительному сокращению необходимого числа итераций.

Параметры тестовой задачи о разрывном квазиодномерном течении в канале. Площадь канала изменяется по формуле

$$A(x) = A_* + (1 - A_*) \left(1 - \frac{x}{x_*}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Сечение с минимальной площадью $A_* = A(x_*) = 0,5$ расположено при $x_* = 0,5$. Величины на входе в канал ($x = 0$) и на выходе из канала ($x = 1$) равны

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} 1,0000000 \\ 1,0237498 \\ 8,0000000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x=1} = \begin{pmatrix} 0,8835893 \\ 1,1586268 \\ 7,0315580 \end{pmatrix}.$$

Скачок находится в расширяющейся части канала при $x_s = 0,75$. Величины перед скачком (индекс L) и после скачка (индекс R) равны

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0,3727226 \\ 4,3946838 \\ 2,0092313 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0,7570965 \\ 2,1635258 \\ 5,6638622 \end{pmatrix}.$$

На рис. 31 показаны результаты расчета по схеме 22 (неявная схема первого порядка). Итераций для получения сошедшегося решения потребовалось значительно меньше, чем при использовании явных схем. А что бы вы сказали о точности решения?

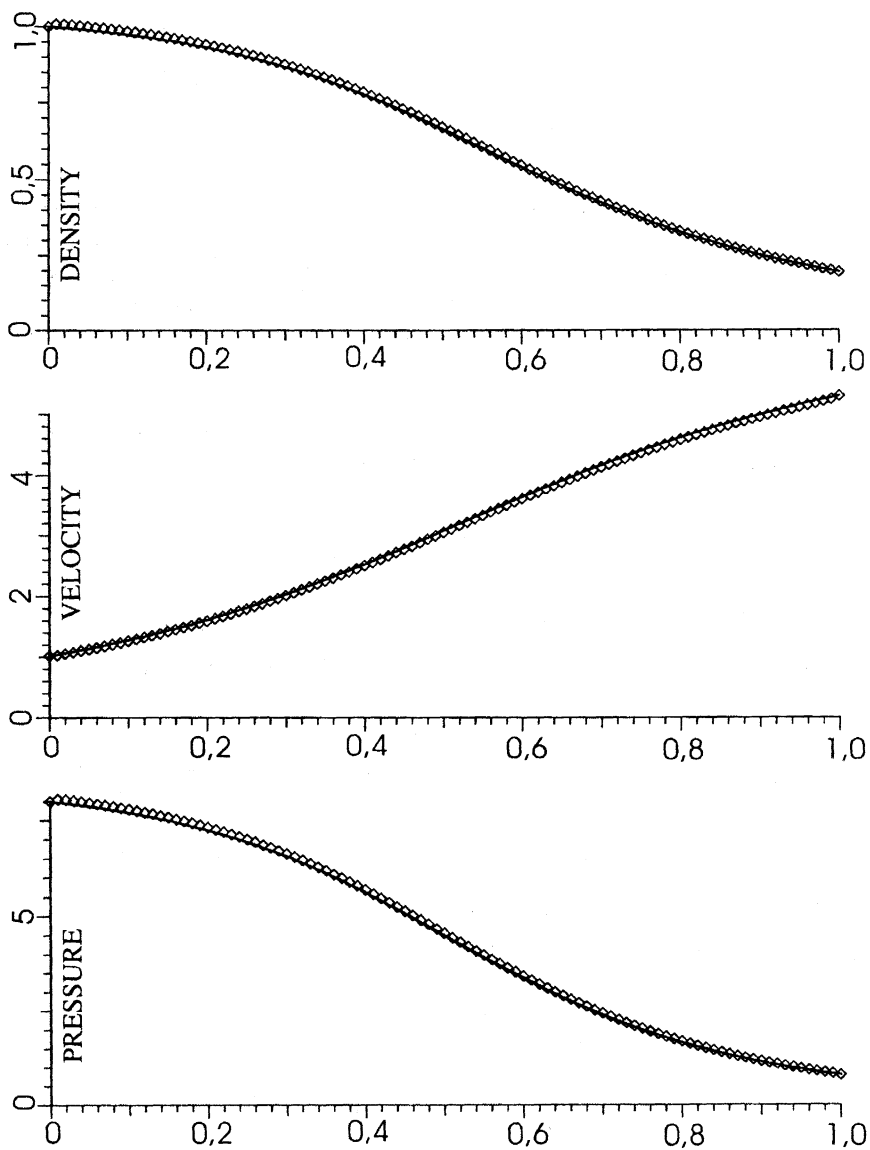


Рис. 30

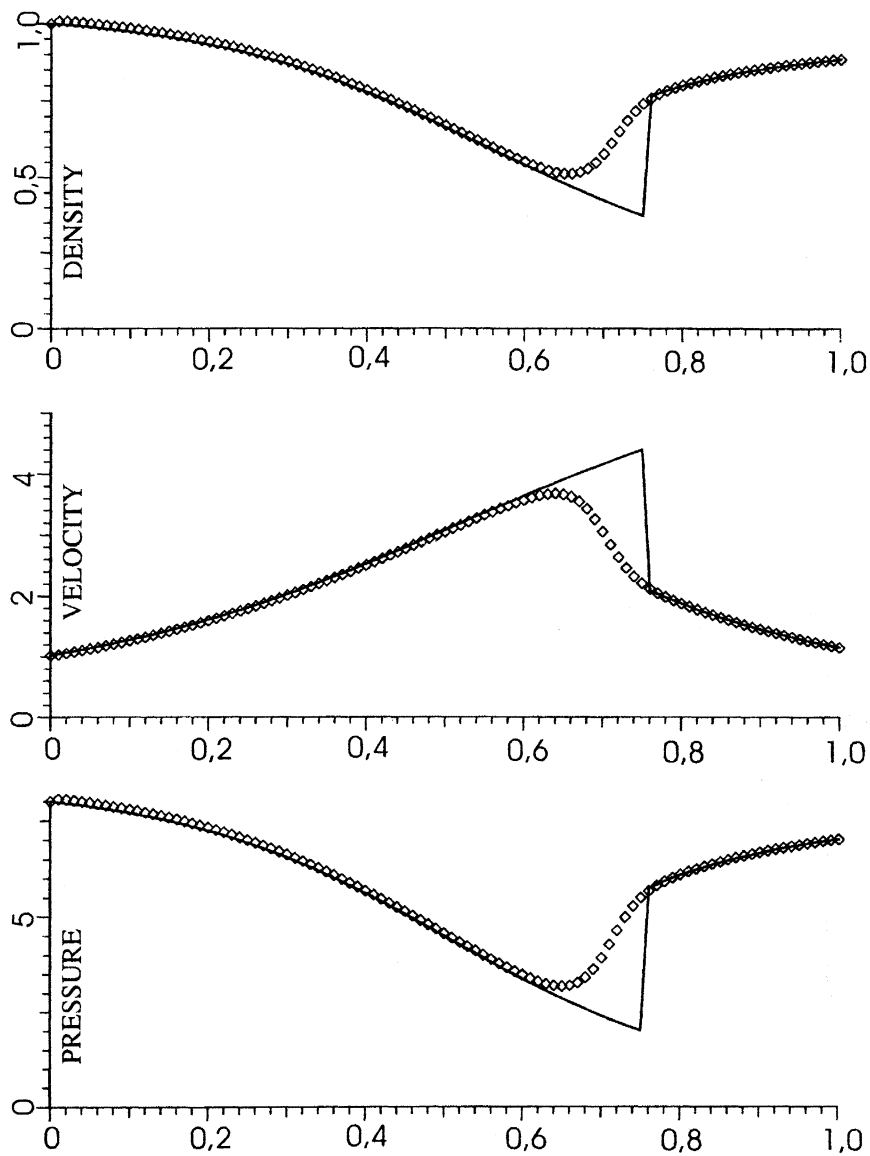


Рис. 31

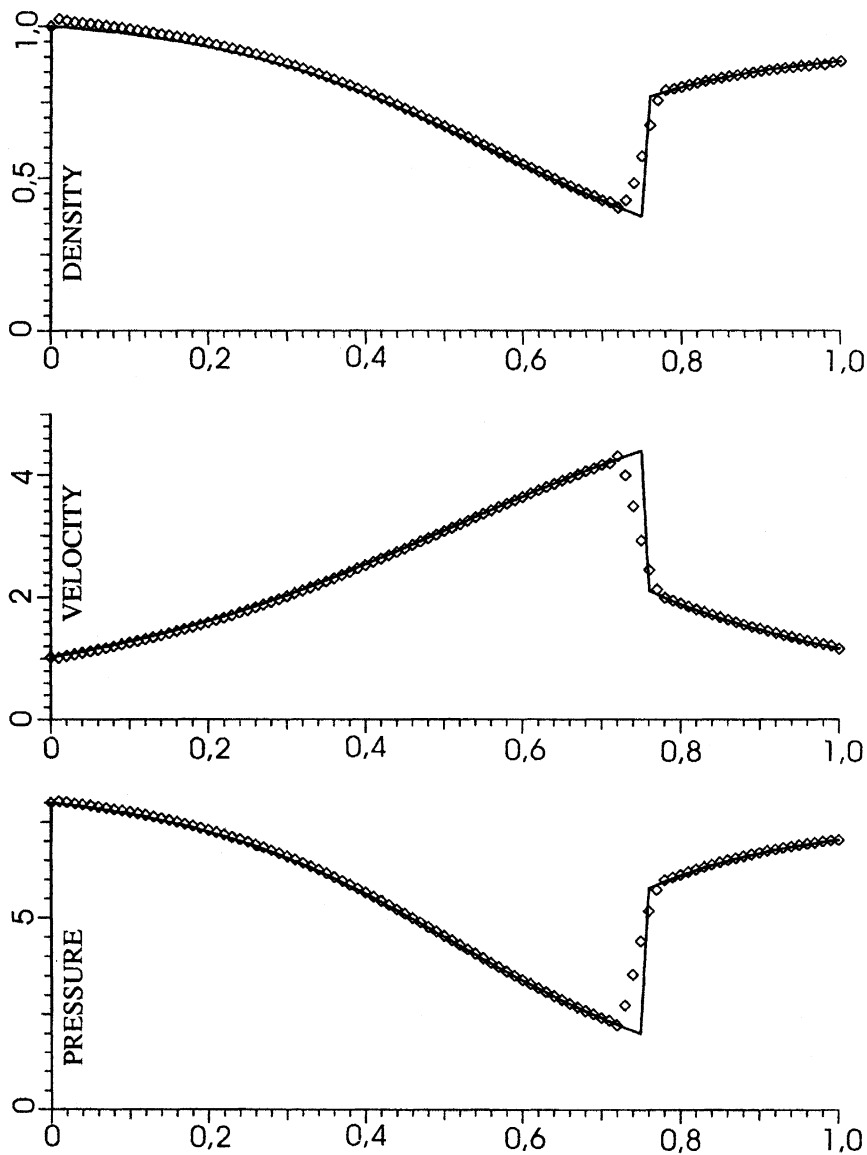


Рис. 32

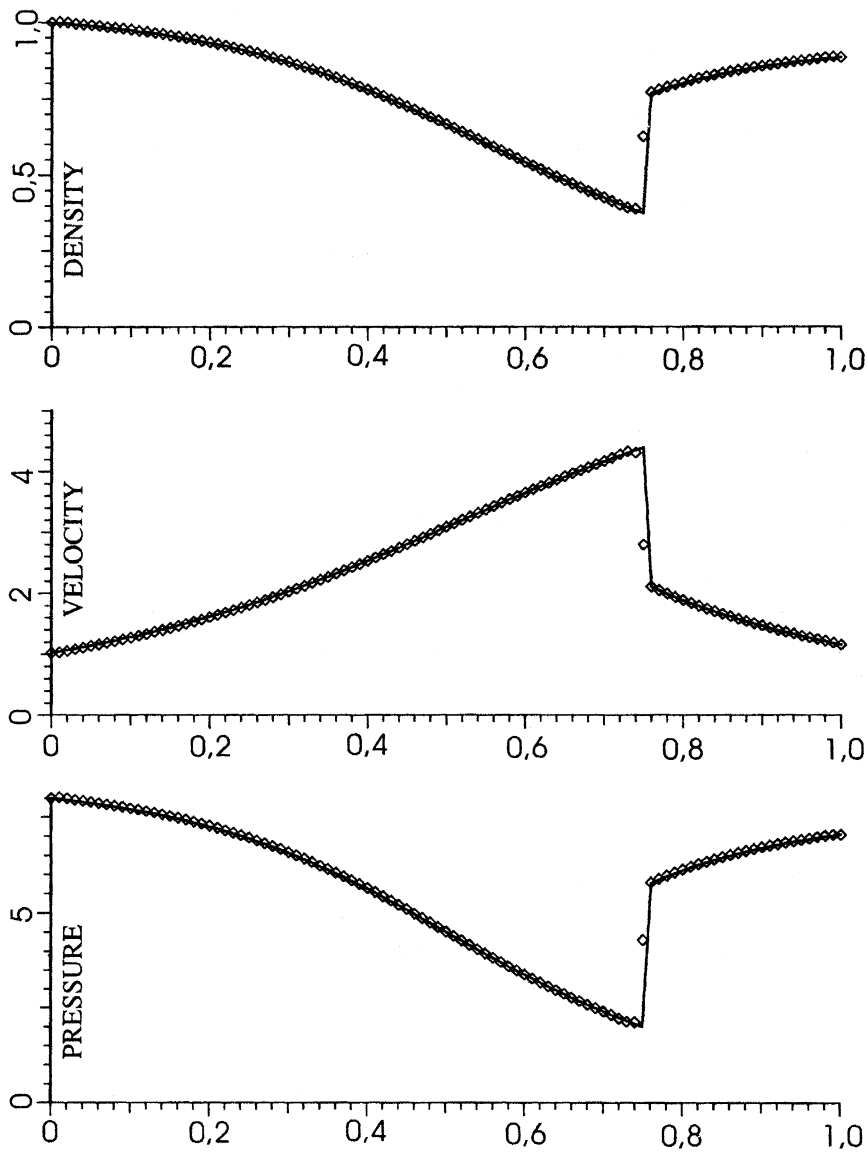


Рис. 33

Получше смотрятся изображенные на рис. 32 результаты, полученные по схеме второго порядка с искусственной вязкостью (Лакс – Вендрофф, схема 12).

Даже с большей убедительностью, чем в задаче о работе ударной трубы, доказывает здесь свое превосходство схема 15 (второй порядок, TVD). Результаты ее работы приведены на рис. 33.

Глава 6. Визуализация

Представление результатов расчетов в виде рисунков существенно помогает при анализе этих результатов, а также при отладке компьютерной программы, реализующей численный алгоритм. Примером использования графиков может служить известное всем со школьной скамьи рисование функции $y = y(x)$ для исследования ее свойств. Для функций, зависящих от двух переменных, тоже существуют способы наглядного представления. Это делается, например, с помощью изолиний, как на рис. 34. (Похожее можно встретить на географических картах, содержащих информацию о высоте местности над уровнем моря или плотность населения.) Векторнозначную функцию можно изобразить с помощью стрелок, как на рис. 35. (Таким образом удобно представить, например, направление и скорость ветра или воды в океане.)

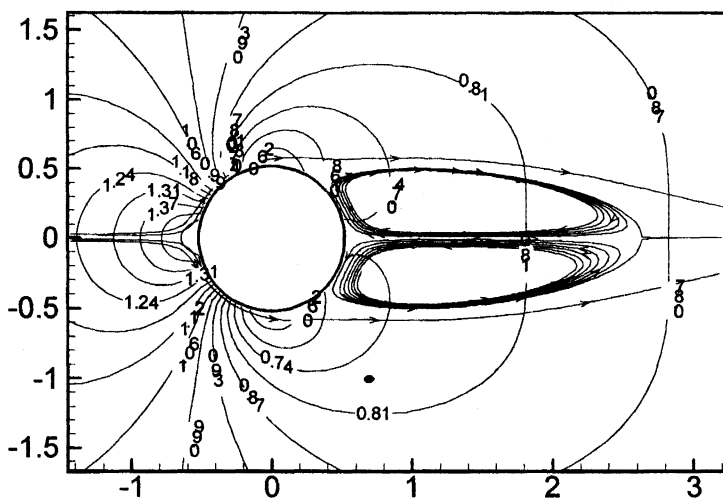


Рис. 34

Для создания подобных и других сколько-нибудь сложных рисунков нужен компьютер и специальные программы, которым вы передаете вычисленные вами функции и указываете в каком виде их изобразить. А что делать, если у вас нет программы для визуализации, которой вы умеете пользоваться, но есть некоторый опыт программирования на языке Pascal? В этом случае тоже имеется возможность для создания графических изображений на экране монитора. Приведенный ниже текст программы и пояснения, следующие за ним, помогут сделать первые шаги в приобретении опыта рисования.

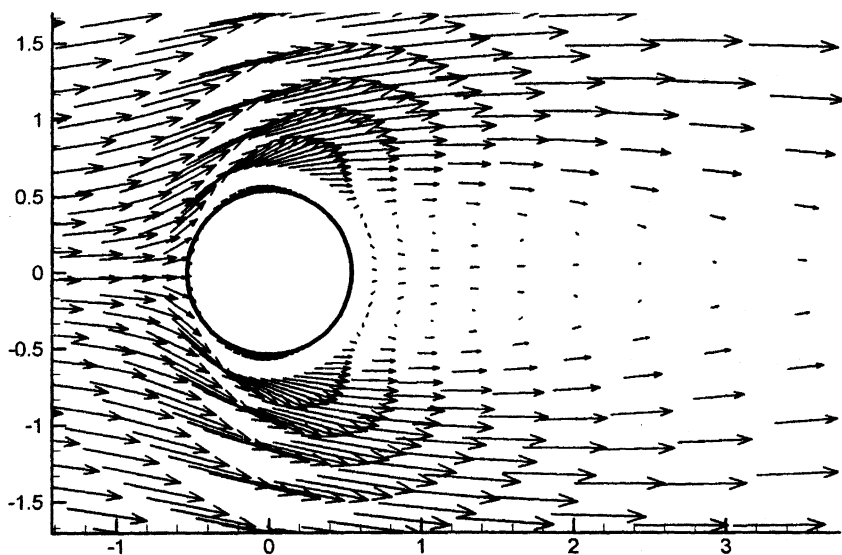


Рис. 35

```

1  USES CRT, GRAPH;
2  {}
3  VAR LEFT, RIGHT, BOTTOM, TOP: INTEGER;
4  X_MIN, X_MAX, Y_MIN, Y_MAX: REAL;
5  X_E, Y_E: INTEGER;
6  LIM: INTEGER;
7  GD, GM: INTEGER;
8  AX, BX, AY, BY, A, B, H: REAL;

```



```

9      {}
10     FUNCTION F(X: REAL): REAL;
11     BEGIN
12     F:=SIN(X);
13     END;
14     {}
15     PROCEDURE WAIT;
16     VAR CH: CHAR;
17     BEGIN
18         REPEAT UNTIL KEYPRESSED;
19         WHILE KEYPRESSED DO CH:=READKEY
20     END;
21     {}
22     { ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА }
23     BEGIN
24     { ЗАДАНИЕ ПРЕДЕЛОВ ИЗМЕНЕНИЯ АРГУМЕНТА И ФУНКЦИИ }
25     X_MIN:=-PI;
26     X_MAX:=PI;
27     Y_MIN:=-1.0;
28     Y_MAX:=1.0;
29     { ПЕРЕХОД В ГРАФИЧЕСКИЙ РЕЖИМ }
30     INITGRAPH(GD, GM, 'C:\BP\BGI');
31     { ЗАДАНИЕ ОБЛАСТИ РИСОВАНИЯ НА ЭКРАНЕ }
32     LEFT:=100;
33     RIGHT:=GETMAXX-5;
34     BOTTOM:=GETMAXY-50;
35     TOP:=5;
36     { ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ }
37     AX:=(RIGHT-LEFT)/(X_MAX-X_MIN);
38     BX:=LEFT-AX*X_MIN;
39     AY:=(TOP-BOTTOM)/(Y_MAX-Y_MIN);
40     BY:=BOTTOM-AY*Y_MIN;
41     { ОТРИСОВКА ФУНКЦИИ F(X) НА ОТРЕЗКЕ (A, B) }
42     A:=X_MIN;
43     B:=X_MAX;
44     IM:=10;
45     H:=(B-A)/IM;
46     CLEARDEVICE;
47     SETCOLOR(10);
48     X_E:=ROUND(AX*A+BX);

```

```

49         Y_E:=ROUND(AY*F(A)+BY);
50         MOVETO(X_E, Y_E);
51     FOR I:=1 TO IM DO
52         BEGIN
53             X_E:=ROUND(AX*(A+I*H)+BX);
54             Y_E:=ROUND(AY*F(A+I*H)+BY);
55             LINETO(X_E, Y_E);
56         END;
57     WAIT;
58     { ВЫХОД ИЗ ГРАФИЧЕСКОГО РЕЖИМА }
59     CLOSEGRAPH;
60 END.

```

Поставим задачу получить на экране монитора изображение самой популярной среди студентов функции $y = \sin x$. Зададим интересующие нас пределы изменения аргумента и функции, строки 25–28. Переключим монитор в графический режим, 30. (Последний параметр процедуры INITGRAPH для вашего компьютера может быть другим!) В графическом режиме стали доступны процедуры и функции, среди аргументов которых важными являются экранные координаты, принимающие только целые значения. Верхний левый угол экрана имеет координаты $(0,0)$, рис. 36.

Вертикальная ось координат (oY) направлена вниз, горизонтальная (oX) — вправо. Максимальные возможные значения вертикальной координаты (самый низ экрана) и горизонтальной координаты (правая граница экрана) соответственно равны значениям функций GETMAXY и GETMAXX. Зададим на экране границы прямоугольника, в котором мы хотим нарисовать нашу функцию, 32–35.

Следующий шаг является очень важным. Необходимо избавиться от неудобства, вызванного тем, что подпрограммы, осуществляющие рисование, понимают только экранные координаты с фиксированными пределами изменения, в то время как изображаемая функция может быть задана на каком угодно отрезке и изменяться в каких угодно пределах. Для решения проблемы достаточно задать формулы линейного преобразования математических координат $(x, y(x))$ в экранные координаты (x_e, y_e) :

$$x_e = ax * x + bx$$

$$y_e = ay * y(x) + by.$$

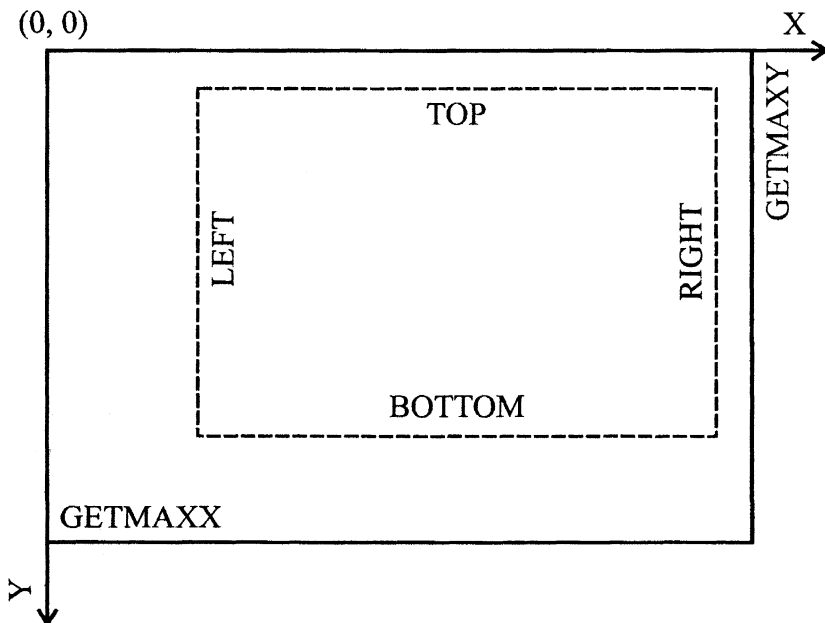


Рис. 36

Коэффициенты ax, bx, ay, by находятся в строках 37–40 из условия, что преобразование должно переводить отрезок $[x_min, x_max]$ в отрезок $[left, right]$, а отрезок $[y_min, y_max]$ в отрезок $[bottom, top]$.

На этом подготовительная работа окончена и можно приступать к рисованию. Зададим начало и конец отрезка, на котором будет нарисована функция, строки 42–43. Поместим перо в точку $(a, f(a))$, 50. (На самом деле перо оказывается на экране в позиции, которая только соответствует точке $(a, f(a))$, так как предварительно мы нашли экранные координаты, целые числа, в строках 48–49. Но в том и заключается ценность подготовительной работы, что мы можем говорить и действовать так, будто на экране введена нужная система координат, не забывая при этом перед обращениями к подпрограммам рисования переводить математические координаты в экранные.)

В результате работы приведенной программы на экране появится ломаная линия, совпадающая с функцией $y = y(x)$ в точках излома. Нарисованная функция будет выглядеть все более гладкой при увеличении ИМ в

строке 44. В большинстве случаев достаточно положить $IM=50 \div 100$, а делать IM больше чем $GETMAXX$ не имеет смысла из-за ограниченной разрешимости экрана.

Совсем небольшие изменения нужно сделать в программе, если потребуется нарисовать другую функцию. Для этого надо определить функцию в подпрограмме, 10–13, и задать необходимые пределы изменения, 25–28.

Для того чтобы изобразить сеточную функцию $y_i = y(x_i)$, $i = 1, \dots, IM$, а именно сеточные функции находятся, как правило, в результате численного решения уравнений, можно заменить строки 48–56 на

```
FOR I:=1 TO IM DO
BEGIN
X_E:=ROUND(AX*X[I])+BX);
Y_E:=ROUND(AY*Y[I])+BY);
CIRCLE(X_E, Y_E, 3);
END; .
```

Подпрограмма `CIRCLE` рисует кружки, которые вы можете для наглядности соединить при помощи `LINETO`.

Информативность рисунка увеличится, если его дополнить осями координат с насечками, снабженными цифрами, которые укажут пределы изменения аргумента и функции. Оси координат можно расположить слева и снизу от области графика — не с этой ли целью там сделаны такие значительные отступы, строки 32 и 34?

Перевод математических координат в экранные перед обращениями к подпрограммам типа `LINETO` может показаться кому-то обременительным, особенно если таких обращений в программе много. В этом случае можно описать собственную версию процедуры:

```
PROCEDURE MY_LINETO(X, Y: REAL);
BEGIN
LINETO(ROUND(AX*X+BX), ROUND(AY*Y+BY));
END; .
```

Тогда вместо строк 53–55 достаточно будет одной строки, совсем не содержащей экранные координаты:

```
MY_LINETO(A+I*H, F(A+I*H)); .
```

В заключение скажем, что если вы хотите предпринять еще какие-либо действия по улучшению рисунка или сделать программу более универсальной, то имеет смысл сначала познакомиться с остальными подпрограммами графической библиотеки. Для этого вы можете обратиться, например, к "Turbo Pascal's Online Help."

Литература

1. Годунов С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979, 392 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980, 616 с.
3. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981, 368 с.
4. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.
6. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1982, 254 с.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 1, 502 с.
8. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985, 364 с.
9. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 1, 384 с.
10. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений: Матем. Сборник. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
11. Harten A. High resolution schemes for heperbolic conservation laws J. Comp. Phys. 1983. V. 49. No. 3. P. 357–393.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М: Наука, 1987, 840 с.
13. Roe P.L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. J.Comp.Phys. 1981. V. 43. No. 2. P. 357–372.
14. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981, 304 с.
15. MacCormack R.W. A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow. AIAA Journal. 1982. V. 20. No. 9. P. 1275–1281.
16. Lapidus A. J.Comp.Phys. 1967. V. 2. No. 2. P. 154–177.