Тема 6. Другие способы интерполирования. Многомерная интерполяция.

6.1. Эрмитова интерполяция.

Пусть в интерполяционной таблице заданы не только x_i и y_i ($i = 0,...,N$), но и значения производных $y_i^{(k)}$ до порядка m. Тогда можно потребовать, чтобы в узлах интерполяции совпадали не только значения функции и интерполяционного многочлена, но и их производные. Такая интерполяция называется ***эрмитовой.*** Интерполяционный полином Эрмита обозначим $Q_{2m+1}(x)$. Рассмотрим случай двух узлов x_0 и x_1 ($N = 1$). Тогда для $x \in [x_0, x_1]$ введём замену: $\xi = \left[x - 0.5(x_1 + x_0)\right]/h,\ h = x_1 - x_0,\ \xi \in [-0.5, 0.5],$ и запишем многочлены Эрмита в следующем рекурсивном виде:

$$Q_1(x) = 0.5(y_0 + y_1) + (y_1 - y_0)\xi; \quad Q_3(x) = Q_1(x) + \left(\xi^2 - 1/4\right)\left(\alpha^{(1)} + \beta^{(1)}\xi\right);$$

$$Q_5(x) = Q_3(x) + \left(\xi^2 - 1/4\right)^2\left(\alpha^{(2)} + \beta^{(2)}\xi\right); \quad Q_7(x) = Q_5(x) + \left(\xi^2 - 1/4\right)^3\left(\alpha^{(3)} + \beta^{(3)}\xi\right); \quad ...$$

$$Q_{2m+1}(x) = Q_{2m-1}(x) + \left(\xi^2 - 1/4\right)^m\left(\alpha^{(m)} + \beta^{(m)}\xi\right).$$

Параметры $\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}$ находятся из условий равенства соответствующих производных:

$$Q_3^{(1)}(x_0) = y_0^{(1)}, Q_3^{(1)}(x_1) = y_1^{(1)}; \quad Q_5^{(2)}(x_0) = y_0^{(2)}, Q_5^{(2)}(x_1) = y_1^{(2)}; \quad Q_7^{(3)}(x_0) = y_0^{(3)}, Q_7^{(3)}(x_1) = y_1^{(3)}; \quad ...$$

$$\alpha^{(1)} = \left(y_1^{(1)} - y_0^{(1)}\right)h/2, \quad \beta^{(1)} = \left(y_1^{(1)} + y_0^{(1)}\right)h + 2(y_1 - y_0); \quad ...$$

Погрешность интерполяции Эрмита имеет вид погрешности интерполяции Ньютона:

$$\left|R_{2m+1}\right| \le \frac{M_{2m+2}}{(2m+2)!}\left|\omega_{2m+2}(x)\right|, \quad \omega_{2m+2} = (x - x_0)^{m+1}(x - x_1)^{m+1}, \quad M_{2m+2} = \max_{\xi \in [x_0, x_1]}\left|f^{(2m+2)}(\xi)\right|.$$

Многочлены Эрмита на порядок точнее многочленов Ньютона и (в отличие от многочленов Лагранжа) обладают свойством локальности: на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ вычисляются независимо.

6.2. Сплайн-интерполяция.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$ и сетка $\{x_i,\ 0 \le i \le N\}$. ***Полиномиальным интерполяционным сплайном*** $S_p(x)$ степени p дефекта q функции $f(x)$ называется функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $S_p(x)$ на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ является полиномом степени p;

2) в узлах сетки $S_p(x_i) = y_i = f(x_i)$;

3) во внутренних узлах сетки сплайн непрерывен вместе со своими $p - q$ производными:

$$S_p^{(k)}(x_i - 0) = S_p^{(k)}(x_i + 0), \quad 0 \le k \le p - q, \quad 1 \le i \le N - 1.$$

Чаще всего используют сплайны дефекта $q = 1$, когда разрывна лишь старшая p-я производная, а все младшие производные непрерывны. В этом случае говорят о сплайне степени p. Примеры сплайнов:

1) Ломаная, проведённая по точкам (x_i, y_i) есть сплайн степени 1 дефекта 1 (***линейный сплайн***).

2) Многочлен Эрмита степени 3 имеет непрерывные первые производные в узлах сетки, следовательно это сплайн степени 3 дефекта 2.

3) ***Кубический сплайн***: $S_3(x) = a_i + b_i\xi + c_i\xi^2 + d_i\xi^3,\ \ \xi = \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}} \in [0,1],\ \ h_{i+1} = x_{i+1} - x_i,\ \ x_i < x < x_{i+1},\ 0 \le i \le N - 1.$

Производные сплайна $S_3'(x) = \left(b_i + 2c_i\xi + 3d_i\xi^2\right)/h_{i+1}, \quad S_3''(x) = \left(2c_i + 6d_i\xi\right)/h_{i+1}^2.$

Условия для определения коэффициентов:

$$S_3(x_i) \equiv a_i = y_i,\ 0 \le i \le N - 1;\ S_3(x_{i+1}) \equiv a_i + b_i + c_i + d_i = y_{i+1},\ 0 \le i \le N - 1;$$

$$S_3'(x_i - 0) \equiv \left(b_{i-1} + 2c_{i-1} + 3d_{i-1}\right)/h_i = b_i/h_{i+1} \equiv S_3'(x_i + 0),\ 1 \le i \le N - 1;$$

$$S_3''(x_i - 0) \equiv \left(2c_{i-1} + 6d_{i-1}\right)/h_i^2 = 2c_i/h_{i+1}^2 \equiv S_3''(x + 0),\ 1 \le i \le N - 1.$$

Количество неизвестных в системе $4N$, количество уравнений $4N - 2$. Для решения задачи требуются ***дополнительные (граничные) условия***. Примеры граничных условий:

1) Периодические условия: $S_3(x_0 + 0) = S_3(x_N - 0), \quad S_3'(x_0 + 0) = S_3'(x_N - 0), \quad S_3''(x_0 + 0) = S_3''(x_N - 0).$

2) Условия на первую производную: $S_3'(x_0) = y_0',\ S_3'(x_N) = y_N'.$

3) Условия на вторую производную: $S_3''(x_0) = y_0'',\ S_3''(x_N) = y_N''.$

4) Смешанные условия – комбинация 2) и 3).

Условия на коэффициенты можно привести к системе размерности $N+1$, если учесть соотношения: $a_i = y_i,\quad i=0,...,N-1;\quad b_i = y_{i+1} - y_i - c_i - d_i,\quad i=0,...,N-1;\quad d_i = \left(c_{i+1}h_{i+1}^2 / h_{i+2}^2 - c_i\right)/3,\ 0 \le i \le N-2.$ Итоговая система для коэффициентов решается методом Гаусса для ленточных матриц (одним из вариантов метода прогонки). Оценка погрешности на равномерной сетке: $\left|f(x) - S_3(x)\right| \le \dfrac{1}{384} M_4 h^4,\quad M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|.$

6.3. Нелинейная интерполяция.

В случае функций, имеющих большие производные или полюса, применяют не полиномиальные, а другие нелинейные интерполяции. Примером является ***рациональная интерполяция***:

$f(x) \approx R_{M,L}(x) = P_M(x)/Q_L(x),\quad P_M(x) = \sum\limits_{m=0}^{M} a_m x^m,\ \ Q_L(x) = \sum\limits_{l=0}^{L-1} b_l x^l + x^l.$ Рациональная функция может передать полюс $f(x)$ q-го порядка в точке $\bar{x}$: для этого достаточно, чтобы $Q_L(x)$ содержало множитель $(x-\bar{x})^q$. Можно передать горизонтальную асимптотику функции $f(x)$ при $x \to \infty$: для этого достаточно положить $M = L$. ***Нахождение коэффициентов***: рациональная интерполяция содержит $M+L+1$ свободный коэффициент. Для их нахождения выберем такое же число значений табулированной функции и запишем уравнения: $y_i = f(x_i) = P_M(x_i)\big/Q_L(x_i),\ \ 0 \le i \le M+L$. Эти уравнения преобразуются к виду: $\sum\limits_{m=0}^{M} a_m x_i^m - y_i \sum\limits_{l=0}^{L-1} b_l x_i^l = y_i x_i^L,\ \ 0 \le i \le M+L$. Полученная система имеет плотную матрицу и решается методом Гаусса. Точность рациональной интерполяции при наличии полюсов внутри интервала интерполяции не может быть оценена с помощью обычного остаточного члена.

Барицентрическая формула порядка p для функции без полюсов внутри отрезка $[x_0, x_N]$:

$R_p(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{N-p} \dfrac{w_i}{x-x_i} y_i\right) \Big/ \left(\sum\limits_{i=0}^{N-p} \dfrac{w_i}{x-x_i}\right),\quad w_i = \sum\limits_{l=\max(0,i-p)}^{\min(i,N-p)} (-1)^l \prod\limits_{j=l,\, j\ne i}^{l+p} \dfrac{1}{x_i - x_j},$ ошибка составляет $O\left(h^{p+1}\right)$:

$$\|R - f\|_C \le h^{p+1} \times \begin{cases} (b-a)\dfrac{\left\|f^{(p+2)}\right\|_C}{p+2}, & N+1-p = 2k+1\,(\textit{нечётное}); \\ (b-a)\dfrac{\left\|f^{(p+2)}\right\|_C}{p+2} + \dfrac{\left\|f^{(p+1)}\right\|_C}{p+1}, & N+1-p = 2k\,(\textit{чётное}). \end{cases}$$

Порядок б.ф. выбирают из диапазона $p = 3..20$. При $p = 3$ точность б.ф. как у кубического сплайна.

6.4. Многомерная интерполяция.

В случае табуляции функции многих переменных различают две ситуации: ***табуляция на произведении одномерных сеток*** и ***табуляция на произвольной многомерной сетке***. Рассмотрим случай двух переменных: $u = f(x,y)$.

Регулярная сетка. Рассмотрим табуляцию $\left\{u_{i,j} = f(x_i, y_j), i = 0,...,N_x, j = 0,...,N_y\right\}$ на сетке $\Omega = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y$. Тогда можно использовать теорию одномерной интерполяции и заменять функцию на линиях сетки $y = y_j$ интерполяционным многочленом по x: $f(x, y_j) \approx P_{N_x}^{(j)}(x)$, а в других точках y интерполировать $P_{N_x}^{(j)}(x)$ интерполяционным многочленом по y. Пример линейной интерполяции:

$$f(x, y_j) \approx f(x_i, y_j) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)\right] \equiv u_{i,j} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right],$$

$$f(x, y_{j+1}) \approx f(x_i, y_{j+1}) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[f(x_{i+1}, y_{j+1}) - f(x_i, y_{j+1})\right] \equiv u_{i,j+1} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}\right],$$

$$f(x,y) \approx f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\left[f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)\right] \approx$$

$$\approx u_{i,j} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right] + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\left[u_{i,j+1} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}\right] - u_{i,j} - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left[u_{i+1,j} - u_{i,j}\right]\right] =$$

$$= u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}(y - y_j) + \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j}}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}(x - x_i)(y - y_j) \equiv P(x,y).$$

Погрешность интерполяции определяется остаточным членом (приведём его для равномерной сетки):

$R(x,y)=P(x,y)-f(x,y)=\frac{1}{2!}\left[f_{xx}^{(2)}(\xi,\eta)h_x^2+2f_{xy}^{(2)}(\xi,\eta)h_xh_y+f_{yy}^{(2)}(\xi,\eta)h_y^2\right]$, который можно получить, разложением функции в ряд Тейлора.

Нерегулярная сетка. В этом случае имеем таблицу $\{u_i=f(x_i,y_i), i=0,...,N\}$. По точкам нерегулярной сетки (x_i,y_i) можно построить триангуляцию. В каждом треугольнике можно заменить искомую функцию $f(x,y)$ константой, линейной функцией, полулинейной функцией, квадратичной функцией и т.д.

Примеры. Пусть наша табуляция рассматривается в узлах одного треугольника с вершинами в точках $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$, $P_3=(x_3,y_3)$. Значения функции $f(x,y)$ в этих точках обозначим u_1,u_2,u_3.

Интерполяция 0-го порядка внутри треугольника имеет вид: $f(x,y)\approx C=const$. Среди возможных значений константы C используют два: $C=f(x_0,y_0)\equiv f(P_0)=u_0$, $P_0=(x_0,y_0)$, $x_0=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y_0=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$, или $C=\frac{1}{3}\left(f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)\right)$. Первый вариант используется тогда, когда известно значение функции в центре масс треугольника P_0. Второй вариант является более естественным для задачи интерполяции.

Интерполяция 1-го порядка внутри треугольника записывается в виде: $f(x,y)\approx A+Bx+Cy$. Неизвестные коэффициенты находятся из условий: $A+Bx_i+Cy_i=u_i$, $i=1,2,3$.

Интерполяция полулинейной функцией имеет вид: $f(x,y)\approx A+Bx+Cy+Dxy$. Для нахождения коэффициентов используются четыре условия, например: $A+Bx_i+Cy_i+Dx_iy_i=u_i$, $i=0,1,2,3$.

Интерполяция 2-го порядка имеет вид: $f(x,y)\approx A+Bx+Cy+Dxy+Ex^2+Fy^2$. Для нахождения коэффициентов требуется шесть условий. Для этого обычно используют три условия в вершинах треугольника и три условия в серединах его рёбер $P_4=\frac{1}{2}(P_1+P_2)$, $P_5=\frac{1}{2}(P_2+P_3)$, $P_6=\frac{1}{2}(P_3+P_1)$:

$A+Bx_i+Cy_i+Dx_iy_i+Ex_i^2+Fy_i^2=u_i$, $i=1,...,6$; $u_i=f(P_i)$, $u_{i+3}=0.5(u_i+u_{i\oplus 1})$, $i=1,2,3$. В общем случае для упрощения алгоритма построения интерполянта последний находят из локального уравнения:

$$\begin{vmatrix} u & 1 & x & y \\ u_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ u_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} u & 1 & x & y & xy \\ u_1 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ ... & 1 & ... & ... & ... \\ u_4 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} u & 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 \\ u_1 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ ... & 1 & ... & ... & ... & ... & ... \\ u_6 & 1 & x_6 & y_6 & x_6y_6 & x_6^2 & y_6^2 \end{vmatrix}=0.$$

В случае трёх переменных нерегулярная сетка состоит из тетраэдров. В пространствах большей размерности эти объекты называются симплексами. Принципы построения интерполяции те же. Остаточный член также можно получить путём разложения функции в ряд Тейлора.

Задачи

Задача 6.1. Составить таблицу значений функции $y=f(x)$ и её первых производных на отрезке $[a,b]$ с шагом h. Построить многочлен Эрмита 3-й степени и вычислить значения функции в двух точках $x_1^*=a+0.25h$, $x_2^*=b-0.25h$, $h=0.01$, вычислить погрешность в этих точках с помощью остаточного члена, определить максимальную погрешность формулы на всем отрезке $[a,b]$. В ответе привести также коэффициенты многочлена Эрмита. **Варианты задания:**

1) $f(x)=e^x, a=0.5, b=0.6$; 2) $f(x)=\lg x, a=1.3, b=1.4$; 3) $f(x)=\sin x, a=1.0, b=1.1$;

4) $f(x)=sh\, x, a=1.2, b=1.3$; 5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}, a=0.3, b=0.4$; 6) $f(x)=\sqrt{1-x^2}, a=0.8, b=0.9$;

7) $f(x)=\ln\sqrt{1+x+x^2}, a=0.1, b=0.2$; 8) $f(x)=\ln\sqrt{1-x+x^2}, a=0.2, b=0.3$.

Задача 6.2. Решить задачу 6.1, используя кубический сплайн с граничными условиями на первую производную. В ответе привести также коэффициенты сплайна. **Варианты задания те же.**

Задача 6.3. Решить задачу 6.1 используя барицентрическую рациональную интерполяцию порядка 3. В ответе привести также коэффициенты интерполянта w_i. **Варианты задания те же.**

Задача 6.4. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $u = f(x, y)$ в прямоугольнике $D = [a,b]\times[c,d]$ (рис. 1), где задана регулярная сетка $\Omega = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y$:

$$\bar{\omega}_x = \left\{ x = a + ih_x, i = 0,...,N, h_x = \frac{b-a}{N} \right\},$$

$$\bar{\omega}_y = \left\{ y = c + jh_y, j = 0,...,M, h_y = \frac{c-d}{M} \right\}.$$

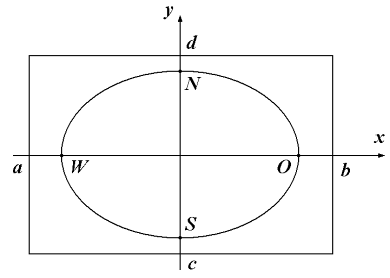

Рисунок 1.

С помощью интерполяционного многочлена вычислить значения функции в северной, южной, западной и восточной точках эллипса $\left(\frac{x-x_*}{\Delta_x}\right)^2 + \left(\frac{y-y_*}{\Delta_y}\right)^2 = 1$, $x_* = \frac{a+b}{2}$, $y_* = \frac{c+d}{2}$, $\Delta_x = \frac{b-a}{3}$, $\Delta_y = \frac{d-c}{3}$. Вычислить реальную погрешность интерполяции в этих точках и оценить максимальную погрешность интерполяции во всех точках эллипса. В ответе привести также значения коэффициентов интерполяционного многочлена. **Варианты задания:**

1) $f(x, y) = \sin(0.5\pi(x + y))$, $a = -0.25, b = +0.25, c = -0.5, d = +0.5, N = 5, M = 10$;

2) $f(x, y) = \cos(0.5\pi(x - y)) - 1$, $a = -0.25, b = +0.25, c = -0.5, d = +0.5, N = 5, M = 10$;

3) $f(x, y) = 1 - \exp(0.5(x * y))$, $a = -0.5, b = +0.5, c = -0.25, d = +0.25, N = 10, M = 5$;

4) $f(x, y) = \exp(-0.5(x * y)) - 1$, $a = -0.5, b = +0.5, c = -0.25, d = +0.25, N = 10, M = 5$;

5) $f(x, y) = sh(-0.25\pi(x + y))$, $a = -0.25, b = +0.25, c = -0.5, d = +0.5, N = 5, M = 10$;

6) $f(x, y) = 1 - ch(0.25\pi(x - y))$, $a = -0.25, b = +0.25, c = -0.5, d = +0.5, N = 5, M = 10$;

7) $f(x, y) = \ln(1 + 0.25(x + y)) - 1$, $a = -0.5, b = +0.5, c = -0.25, d = +0.25, N = 10, M = 5$;

8) $f(x, y) = 1 - \ln(1 + 0.25(x - y))$, $a = -0.5, b = +0.5, c = -0.25, d = +0.25, N = 10, M = 5$.

Задача 6.5. Построить интерполяционный многочлен степени 2 для функции $u = f(x, y)$ в правильном многоугольнике $D_M = \bigcup_{k=1}^{M} \Delta(P_0 P_k P_{k+1})$, вписанном в окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 2). С помощью интерполяционного многочлена вычислить значения функции u в точках экстремума кривой $y = \varphi(x)$, попадающих внутрь многоугольника. Вычислить реальную погрешность интерполяции в этих точках и оценить максимальную погрешность интерполяции во всех точках указанной кривой. В ответе привести также значения коэффициентов интерполяционного многочлена. **Указание**: дополнительные значения функции u взять в серединах рёбер треугольников.

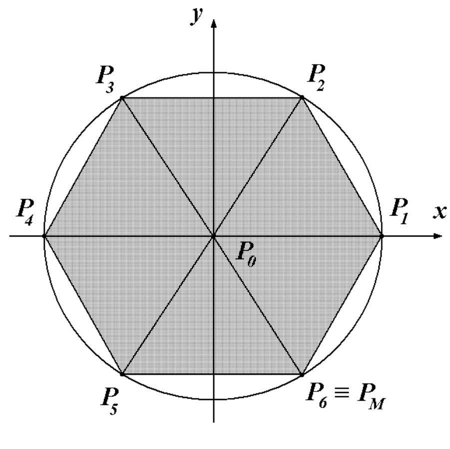

Рисунок 2. Пример многоугольника: правильный шестиугольник.

Варианты задания:

1) $f(x, y) = 1 - \exp(-0.25x^2 - 0.25y^2)$, $\varphi(x) = 0.5\sin(2.5\pi x)$, $M = 6$;

2) $f(x, y) = ch(0.25x^2 + 0.25y^2) - 1$, $\varphi(x) = -0.5\cos(2.7\pi x)$, $M = 7$;

3) $f(x, y) = sh(0.25x^2 - 0.25y^2)$, $\varphi(x) = 10(x^2 - 0.2)(x^2 - 0.5)(x^2 - 0.8)$, $M = 8$;

4) $f(x, y) = \ln(1 + 0.25x^2 + 0.25y^2)$, $\varphi(x) = -8(x^2 - 0.1)(x^2 - 0.4)(x^2 - 0.9)$, $M = 6$;

5) $f(x, y) = 1 - \exp(0.25x^2 + 0.25y^2)$, $\varphi(x) = -0.5\sin(2.4\pi x)$, $M = 7$;

6) $f(x, y) = ch(0.25x^2 - 0.25y^2) - 1$, $\varphi(x) = 0.5\cos(2.5\pi x)$, $M = 8$;

7) $f(x, y) = sh(0.25x^2 + 0.25y^2)$, $\varphi(x) = -10(x^2 - 0.2)(x^2 - 0.6)(x^2 - 0.8)$, $M = 6$;

8) $f(x, y) = \ln(1 + 0.25x^2 - 0.25y^2)$, $\varphi(x) = 8(x^2 - 0.1)(x^2 - 0.5)(x^2 - 0.9)$, $M = 7$.