Тема 5. Полиномиальная интерполяция функций одной переменной.

5.1. Постановка задачи интерполирования.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей: $y_i = f(x_i), \quad i = 0,...,N$.

Найти многочлен $P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{N-i}$ степени не выше N такой, что: $P_N(x_i) = y_i \ (i = 0,...,N)$.

5.2. Интерполирование для случая равноотстоящих узлов.

Если $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = const \ (i = 0,...,N-1)$, и все узлы пронумерованы по возрастанию.

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (i = 0,...,N-k)$ – конечные разности k-го порядка.

5.2.1. Первая интерполяционная формула Ньютона.

$$y(x) \approx P_N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-N+1)}{N!}\Delta^N y_0, \quad q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Остаточный член $R_N(x) = h^{N+1}\frac{q(q-1)...(q-N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi), \quad \xi \in \left(\min(x_0, x), \max(x, x_N)\right)$.

При интерполяции N выбирают так, чтобы разности порядка N были ***почти постоянными.***

Формула применяется для интерполяции и экстраполяции функции вблизи начала таблицы x_0.

$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0$ – ***линейная***, $y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$ – ***квадратичная интерполяция***.

5.2.2. Вторая интерполяционная формула Ньютона.

$$y(x) \approx P_N(x) = y_N + q\Delta y_{N-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{N-2} + ... + \frac{q(q+1)...(q+N-1)}{N!}\Delta^N y_0, \quad q = \frac{x - x_N}{h}.$$

Остаточный член $R_N(x) = h^{N+1}\frac{q(q+1)...(q+N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi), \quad \xi \in \left(\min(x_0, x), \max(x, x_N)\right)$.

Формула применяется для интерполяции и экстраполяции функции вблизи конца таблицы x_N.

5.2.3. Интерполяционная формула Гаусса. Основная идея – записать интерполяцию относительно середины отрезка, то есть сменить нумерацию: $\{x_{-N},...,x_{-1},x_0,x_1,...,x_N\}$.

Формула вперед:

$$P_{2N}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + ... + \frac{(q+N-1)...(q-N+1)}{(2N-1)!}\Delta^{2N-1} y_{-(N-1)} + \frac{(q+N-1)...(q-N)}{(2N)!}\Delta^{2N} y_{-N}.$$

Здесь $q = \frac{x - x_0}{h}$. Разности образуются по правилам: $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (i = -N,...,N-k)$.

Формула назад:

$$P_{2N}(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + ... +$$
$$+\frac{(q+N-1)...(q-N+1)}{(2N-1)!}\Delta^{2N-1} y_{-N} + \frac{(q+N)(q+N-1)...(q-N+1)}{(2N)!}\Delta^{2N} y_{-N}, \quad q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Остаточный член $R_{2N}(x) = \frac{h^{2N+1} f^{(2N+1)}(\xi)}{(2N+1)!} q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)...(q^2 - N^2), \quad \xi \in \left(\min(x, x_{-N}), \max(x, x_N)\right)$.

5.2.4. Интерполяционная формула Стирлинга.

$$P_{2N}(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + ... +$$
$$+\frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)...(q^2 - (N-1)^2)}{(2N-1)!}\frac{\Delta^{2N-1} y_{-N} + \Delta^{2N-1} y_{-(N-1)}}{2} + \frac{q^2(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)...(q^2 - (N-1)^2)}{(2N)!}\Delta^{2N} y_{-N}.$$

Остаточный член тот же, что и для формул Гаусса.

5.2.5. Интерполяционная формула Бесселя.

$$P_{2N+1}(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(q - 0.5\right)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(q-0.5)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{(q-0.5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} +$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!}\frac{\Delta^6 y_{-3}+\Delta^6 y_{-2}}{2}+\ldots+$$
$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-N)(q+N-1)}{(2N)!}\frac{\Delta^{2N} y_{-N}+\Delta^{2N} y_{-(N-1)}}{2}+$$
$$+\frac{(q-0.5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-N)(q+N-1)}{(2N+1)!}\Delta^{2N+1}y_{-N}, \quad q=\frac{x-x_0}{h}.$$

Остаточный член $R_{2N+1}(x)=\dfrac{h^{2N+2}f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+2)!}q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots(q^2-N^2)(q-N-1), \quad \xi\in\left(x_{-N},x_{N+1}\right).$

Формула используется при $q\in[0.25,0.75]$ и x из середины таблицы.

При $q=0.5$ получаем ***формулу интерполирования на средину***. Остаточный член тогда имеет вид:

$$R_{2N+1}(x)=\frac{(-1)^{N+1}h^{2N+2}f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+2)!}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2N+1)^2}{2^{2N+2}}.$$

5.3. Интерполяционная формула Лагранжа. Если упорядоченные узлы интерполяции x_i $(i=0,\ldots,N)$ находятся на разных расстояниях, то решение задачи интерполяции – ***интерполяционный многочлен Лагранжа*** степени N:

$$L_N(x)=\sum_{i=0}^{N}y_i\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{i=0}^{N}(x-x_i), \quad \xi\in\left(\min(x_0,x),\max(x,x_N)\right).$$

$L_i^{(N)}(x)=\prod\limits_{j\neq i}\dfrac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ – ***коэффициенты Лагранжа***. Для их вычисления используют выражения:

$$D_i(x)=(x-x_i)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j), \quad \Pi_{N+1}(x)=\prod_{j=0}^{N}(x-x_j), \quad L_i^{(N)}(x)=\frac{\Pi_{N+1}(x)}{D_i(x)}.$$

Коэффициенты Лагранжа инвариантны относительно замены $x=at+b, \quad x_j=at_j+b \quad (j=0,\ldots,N)$,

т.е. $L_i^{(N)}(x)=L_i^{(N)}(t)$. ***Интерполяционная схема Эйткена*** применяется для расчета значений $L_N(x)$:

$$L_{i,i+1}(x)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i-x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x\end{vmatrix}, \quad L_{i,i+1,i+2}(x)=\frac{1}{x_{i+2}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i-x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2}-x\end{vmatrix},$$
$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x)=\frac{1}{x_{i+3}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1,i+2}(x) & x_i-x \\ L_{i+1,i+2,i+3}(x) & x_{i+3}-x\end{vmatrix},\ldots,L_{0,1,\ldots,N}(x)=\frac{1}{x_N-x_0}\begin{vmatrix} L_{0,1,\ldots,N-1}(x) & x_0-x \\ L_{1,\ldots,N}(x) & x_N-x\end{vmatrix}\equiv L_N(x).$$

Вычисления по схеме ведутся так:

x_i	y_i	x_i-x	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	$\cdots$
x_0	y_0	x_0-x				$\cdots$
x_1	y_1	x_1-x	$L_{01}(x)$			$\cdots$
x_2	y_2	x_2-x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		$\cdots$
x_3	y_3	x_3-x	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	$\cdots$
x_4	y_4	x_4-x	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$\cdots$

Вычисления ведут пока значения $L_{01\ldots M}(x)$ и $L_{01\ldots M,M+1}(x)$ не совпадут в пределах точности.

5.4. Обратное интерполирование.

1) Если функция $y=f(x)$ задана таблицей, то ***обратная задача интерполяции*** состоит в поиске $x=f^{-1}(y)$. Решение ищем с помощью обратного многочлена Лагранжа:

$x=\sum\limits_{i=0}^{N}x_i\prod\limits_{j\neq i}\dfrac{(y-y_j)}{(y_i-y_j)}, \quad R_N(y)=\dfrac{g^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod\limits_{i=0}^{N}(y-y_i), \ \ \xi\in\left(\min(y_0,y),\max(y,y_N)\right), \quad g(y)=x=f^{-1}(y).$ Производные обратной функции вычисляем через производные функции f:

$$g^{(1)}=\frac{dx}{dy}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}=\frac{1}{f^{(1)}(x)}, \quad g^{(m+1)}=\frac{d}{dy}\left(g^{(m)}\right)=\frac{1}{f^{(1)}(x)}\frac{d}{dx}\left(g^{(m)}\right), \quad m=1,2,\ldots;$$

2) Если функция $y=f(x)$ задана таблицей с равноотстоящими узлами, то приближаем ее любым интерполяционным многочленом от q: $y=f(x)\approx P(x)\equiv P(q)$. Интерполяционный многочлен можно записать в виде $P(q)=y_0+\Delta y_0 q\cdot\varphi(q)$. Для заданного y находим q из нелинейного уравнения $y=P(q)$, а затем находим $x=x_0+qh$. Для этого применяем итерации: $q^{(s+1)}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y_0}\dfrac{1}{\varphi(q^{(s)})}, \quad \varphi(q^{(s)})=\dfrac{P(q^{(s)})-y_0}{q^{(s)}\Delta y_0}, \quad s=0,1,2,\ldots, \quad q^{(0)}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y_0}.$

Условие сходимости: $\left|\dfrac{d}{dq}\left(\dfrac{1}{\varphi(q)}\right)\right|\le\alpha<1$. Итерации прекращаем, если $\left|q^{(s+1)}-q^{(s)}\right|<\varepsilon$.

5.5. Нахождение корней уравнения методом обратного интерполирования.

Пусть требуется решить уравнение $f(x)=0$. Составим таблицу значений функции $y=f(x)$, близких к нулю. Размерность N выбираем в зависимости от требуемой точности нахождения корня. В качестве x_0, x_1 берем такие точки, в которых $f(x_0)f(x_1)<0$. Далее методом обратного интерполирования ищем x, для которого $y=0$. Лучше всего расчеты проводить по схеме Эйткена.

Задачи

Задача 5.1. Составить таблицу значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с шагом h. Пользуясь формулой линейной интерполяции Ньютона вычислить значения функции в трех точках $x_1^*=a+0.25h$, $x_2^*=0.5(a+b)-0.25h$, $x_3^*=b-0.25h$, $h=0.01$, вычислить погрешность в этих точках с помощью остаточного члена, определить максимальную погрешность формулы на всем отрезке $[a,b]$. **Варианты задания:**

1) $f(x)=e^x, a=0.5, b=0.6$; 2) $f(x)=\lg x, a=1.3, b=1.4$; 3) $f(x)=\sin x, a=1.0, b=1.1$;

4) $f(x)=sh\,x, a=1.2, b=1.3$; 5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, a=0.3, b=0.4$; 6) $f(x)=\sqrt{1-x^2}, a=0.8, b=0.9$;

7) $f(x)=\ln\sqrt{1+x+x^2}, a=0.1, b=0.2$; 8) $f(x)=\ln\sqrt{1-x+x^2}, a=0.2, b=0.3$.

Указание. На частичном сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, куда попала точка x, выбираем интерполяционную формулу в зависимости от положения последней: $y(x)\approx y_i+q\Delta y_i$ или $y(x)\approx y_{i+1}+q\Delta y_i$. Остаточный член 1-ой формулы Ньютона $R_1(x)=h^2\dfrac{q(q-1)}{2}f^{(2)}(\xi),\quad \xi\in\left(\min(x_i,x),\max(x,x_{i+1})\right),\quad q=\dfrac{x-x_i}{h}$. Для 2-ой формулы Ньютона получаем $R_1(x)=h^2\dfrac{q(q+1)}{2}f^{(2)}(\xi),\quad \xi\in\left(\min(x_i,x),\max(x,x_{i+1})\right),\quad q=\dfrac{x-x_{i+1}}{h}$. Погрешность формул может быть оценена сверху величиной $0.125h^2\max\limits_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$. Максимальная погрешность оценивается сверху величиной $0.125h^2\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$.

Задача 5.2. Решить задачу 5.1, используя квадратичную интерполяцию Ньютона. **Варианты задания:** те же.

Указание. На сегменте $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, куда попала точка x, выбираем интерполяционную формулу в зависимости от положения последней: $y(x)\approx y_{i-1}+q\Delta y_{i-1}+\dfrac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_{i-1},\quad q=\dfrac{x-x_{i-1}}{h}$, или $y(x)\approx y_{i+1}+q\Delta y_i+\dfrac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y_{i-1},\quad q=\dfrac{x-x_{i+1}}{h}$.

Остаточный член 1-ой формулы Ньютона $R_2(x)=h^3\dfrac{q(q-1)(q-2)}{6}f^{(3)}(\xi),\quad \xi\in\left(\min(x_{i-1},x),\max(x,x_{i+1})\right)$. Для 2-ой формулы Ньютона получаем $R_2(x)=h^3\dfrac{q(q+1)(q+2)}{6}f^{(3)}(\xi),\quad \xi\in\left(\min(x_{i-1},x),\max(x,x_{i+1})\right)$. Погрешность формул может быть оценена сверху величиной $\dfrac{h^3}{3}\max\limits_{\xi\in[x_{i-1},x_{i+1}]}\left|f^{(3)}(\xi)\right|$, максимальная погрешность – $\dfrac{h^3}{3}\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(3)}(\xi)\right|$.

Задача 5.3. Составить таблицу значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с шагом $h=0.05$. Вычислить значения функции в двух точках $x_1^*=0.5(a+b)-0.35h$, $x_2^*=0.5(a+b)+0.35h$ по формулам Гаусса, Стирлинга и Бесселя с точностью $\varepsilon=10^{-8}$. **Варианты задания:**

1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=1.6, b=1.9$; 2) $f(x)=1/\sqrt{x^2+1}, a=0.5, b=0.8$; 3) $f(x)=e^{-x}, a=0.5, b=0.8$;
4) $f(x)=\lg(1+x), a=0.1, b=0.4$; 5) $f(x)=\cos x, a=1.2, b=1.5$; 6) $f(x)=ch\,(x+1), a=0.3, b=0.6$;
7) $f(x)=sh\,(x-1), a=0.1, b=0.4$; 8) $f(x)=x-ch\,(2x), a=-0.1, b=0.2$.

Указание. По величине шага вычислить максимальный порядок интерполяционной формулы $N=\left[(b-a)/(2h)\right]$ и оценить остаточный член. Если эта величина меньше ε, то вычисления выполнить можно. Во всех задачах необходимо проверить $N=1,2,3$.

Задача 5.4. Составить таблицу значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ на неравномерной сетке. Пользуясь формулой для многочлена Лагранжа вычислить значения функции в трех точках $x_1^*=a+0.5h$, $x_2^*=0.5(a+b)$, $x_3^*=b-0.5h$ (где $h=0.05$ – параметр сетки), вычислить погрешность в этих точках с помощью остаточного члена, определить максимальную погрешность формулы на всем отрезке $[a,b]$. **Варианты задания:**

1) $f(x)=5\cdot\dfrac{\sin x}{x},\quad a=0.05,\quad b=0.35,\quad x_i=a+\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,\dots,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

2) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{0.2+x}},\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_i=a+\dfrac{[ih]^3}{(b-a)^2},\quad i=0,\dots,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x},\quad a=0.65,\quad b=0.95,\quad x_i=b-\dfrac{[(N-i)h]^2}{(b-a)},\quad i=0,...,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

4) $f(x)=5\cdot\exp\left[-0.01/x^2\right],\quad a=-0.35,\quad b=-0.05,\quad x_i=b-\dfrac{[(N-i)h]^3}{(b-a)^2},\quad i=0,...,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

5) $f(x)=5\cdot\exp\left[-x^2/0.01\right],\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$;

6) $f(x)=\ln\left(1+x^2/0.01\right),\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$;

7) $f(x)=1+100\cdot\sin x^3,\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$;

8) $f(x)=1+10\cdot tg^3\left(x\right),\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$.

Указание. Остаточный член в точке можно оценить:

$$\left|R_N(x)\right|=\left|\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)\right|\le\frac{1}{(N+1)!}\cdot\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|\left|\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)\right|.$$

На всем отрезке: $\left|R_N(x)\right|=\left|\dfrac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)\right|\le\dfrac{1}{(N+1)!}\cdot\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(N+1)}(\xi)\right|\cdot\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)\right|$.

Для всех вариантов $\left|R_6(x)\right|\le\dfrac{1}{7!}\cdot\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(7)}(\xi)\right|\cdot\left|\prod_{i=0}^{6}(x-x_i)\right|,\quad R_{6,\max}=\dfrac{1}{7!}\cdot\max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(7)}(\xi)\right|\cdot\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{6}(x-x_i)\right|$.

Задача 5.5. С помощью обратного интерполирования найти с точностью 10^{-5} корень уравнения $f(x)=0$, лежащий на отрезке $[a,b]$. **Варианты задания:**

1) $f(x)=x^2+\ln x, a=0.5, b=1$; 2) $f(x)=(x-1)^2-0.5e^x, a=0.2, b=0.3$; 3) $f(x)=4x-\cos x, a=0, b=0.5$;

4) $f(x)=2\sqrt{x}-\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), a=0.2, b=0.3$ 5) $f(x)=x^2-ctg\left(\dfrac{\pi x}{3}\right), a=0.8, b=0.9$; 6) $f(x)=x^3-\sin(5x), a=0.5, b=0.7$;

7) $f(x)=sh(x)-x^3-0.3, a=0.8, b=1$; 8) $f(x)=ch(x+0.15)-x^2-1, a=-0.1, b=0.1$.

Указание: Построить обратные многочлены Лагранжа для нескольких значений N и вычислить значения корня, например, найти $x^{(N)}$ и $x^{(2N)}$. По их разности оценить точность. Если её не хватает – увеличить N вдвое.

Задача 5.6. Составить таблицу значений функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ на неравномерной сетке. Пользуясь формулой для обратного многочлена Лагранжа вычислить значения обратной функции $x=f^{-1}(y)$ в трех точках $y_1^*=f(a)+0.5\Delta y$, $y_2^*=0.5(f(a)+f(b))$, $y_3^*=f(b)-0.5\Delta y$ (где $\Delta y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}h$, $h=0.05$ – параметр сетки), вычислить погрешность в этих точках с помощью остаточного члена, определить максимальную погрешность формулы на всем отрезке $[a,b]$. **Варианты задания:**

1) $f(x)=4x\cdot e^{-x},\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$;

2) $f(x)=x-\ln\left(3+x^2\right),\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$;

3) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)},\quad a=0.1,\quad b=0.4,\quad x_i=a+\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,...,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

4) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}},\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_i=a+\dfrac{[ih]^3}{(b-a)^2},\quad i=0,...,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

5) $f(x)=\dfrac{e^{x/10}}{1-x},\quad a=0.6,\quad b=0.9,\quad x_i=b-\dfrac{[(N-i)h]^2}{(b-a)},\quad i=0,...,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

6) $f(x)=0.5ctg^2(x),\quad a=-0.4,\quad b=-0.1,\quad x_i=b-\dfrac{[(N-i)h]^3}{(b-a)^2},\quad i=0,...,N,\quad N=\left[(b-a)/h\right]$;

7) $f(x)=\sqrt{1+x+0.1x^2},\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$;

8) $f(x)=\ln\left(1+x+x^2/3\right),\quad a=-0.15,\quad b=0.15,\quad x_{\pm i}=\dfrac{a+b}{2}\pm 2\dfrac{[ih]^2}{(b-a)},\quad i=0,1,...,N,\quad N=\left[(b-a)/(2h)\right]$.