Тема 4. Решение нелинейных алгебраических уравнений и их систем.

4.1. Метод простой итерации

$f(x)=0 \quad <=> \quad x=\varphi(x)\equiv x\pm g(x)\,f(x) \quad => \quad x^{k+1}=\varphi(x^k), \quad k=0,1,2\ldots.$

Сходимость, если $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|\le\alpha<1$ вблизи корня.

4.2. Метод Ньютона

$$f(x)=0 \quad => \quad x^{k+1}=x^k-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^k)\right]^{-1} f(x^k), \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Сходимость, если $\left\|\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^{-2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] f\right\|\le\alpha<1$ вблизи корня.

Регуляризация: $x^{k+1}=x^k-\alpha_{k+1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^k)\right]^{-1} f(x^k), \quad k=0,1,2,\ldots$

Кратность корня p определяем по величине производной в точке корня или по оценке: $\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}\right|=\frac{p-1}{p}$.

4.3. Решение комплексных уравнений.

Уравнение $f(z)=0$ для переменной $z=x+iy$ с помощью эквивалентных преобразований необходимо привести к форме $f_1(x,y)+if_2(x,y)=0$. Тогда оно будет эквивалентно системе $f_1(x,y)=0, \quad f_2(x,y)=0.$

Несколько формул, которые обычно применяются в преобразованиях:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi; \quad \ln z=\ln|z|+i\arg z, \quad \arg z\in(-\pi,\pi];$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\left[e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right], \quad \sin\varphi=\frac{1}{2i}\left[e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right]; \quad ch\varphi=\frac{1}{2}\left[e^{\varphi}+e^{-\varphi}\right], \quad sh\varphi=\frac{1}{2}\left[e^{\varphi}-e^{-\varphi}\right];$$

$$\cos z=\frac{1}{2}\left[e^{iz}+e^{-iz}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{ix-y}+e^{-ix+y}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{y}+e^{-y}\right]\cos x-i\frac{1}{2}\left[e^{y}-e^{-y}\right]\sin x=\cos x\,ch\,y-i\sin x\,sh\,y,$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left[e^{iz}-e^{-iz}\right]=\frac{1}{2i}\left[e^{ix-y}-e^{-ix+y}\right]=\frac{1}{2i}\left[e^{-y}-e^{y}\right]\cos x+\frac{1}{2}\left[e^{-y}+e^{y}\right]\sin x=i\cos x\,sh\,y+\sin x\,ch\,y.$$

4.4. Решение систем уравнений.

Система $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{0}, \quad \mathbf{f},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$.

Канонический вид:

$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\equiv\mathbf{x}\pm\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}),$

$\mathbf{G}(\mathbf{x})$ – положительно определённая матричная функция.

Метод простой итерации:

$\mathbf{x}^{k+1}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k), \quad k=0,1,2\ldots$

Метод простой итерации с параметром:

$\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^k\pm\tau\mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad или \quad \mathbf{x}^{k+1}=(1-\tau)\mathbf{x}^k+\tau\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^k), \quad k=0,1,2\ldots, \quad 0<\tau\le 1.$

Метод Ньютона:

$$\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^k-\alpha_{k+1}\left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}^k)\right]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad 0<\alpha_{k+1}\le 1, \quad k=0,1,2,\ldots; \quad \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}=\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i,j=1,\ldots,m\right\}.$$

4.5. Определение скорости сходимости метода.

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность приближений к величине x^*. Если существуют $\alpha\in[0,1], \beta>0$ и $n_0\in\mathbb{N}$ такие, что $\forall n\ge n_0$ выполняется неравенство $\|x_n-x^*\|\le\alpha\|x_{n-1}-x^*\|^{\beta}$, то говорят, что скорость сходимости метода, реализующего данную последовательность, имеет степень сходимости β. ***Практический способ*** определения степени сходимости: вместо x^* подставить наилучшее приближение, например, последний член последовательности: $\|x_n-x_N\|\le\alpha\|x_{n-1}-x_N\|^{\beta}$ или $\beta\ge\frac{\lg\|x_n-x_N\|-\lg\alpha}{\lg\|x_{n-1}-x_N\|}\ge\frac{\lg\|x_n-x_N\|}{\lg\|x_{n-1}-x_N\|}$. Полезно также следить за величиной $\beta_{n+1}=\frac{\lg\|x_n-x_{n+1}\|}{\lg\|x_{n-1}-x_n\|}$, которая сходится к β.

Задачи

Задача 4.1. Решить уравнение $f(x)=0$ на отрезке $[a,b]$ любым приближенным методом. Определить количество корней, их кратность и значения с точностью до 5 знаков после запятой.

Варианты задания:

1) $f(x)=0.5\exp(2(x-1))-\cos(2(x-1)),\ a=0,\ b=0.5\pi$; 2) $f(x)=0.75\exp(x-0.75)-\sin(2x),\ a=0,\ b=0.5\pi$;

3) $f(x)=0.5(x+1)-[\sin(2x+0.5)]^2,\ a=0,\ b=0.5\pi$; 4) $f(x)=x^2\sin(2x)-0.5,\ a=0,\ b=0.5\pi$;

5) $f(x)=x^2\cos(8x)-0.5,\ a=0,\ b=\pi/3$; 6) $f(x)=0.1+\ln(1+x+x^2+x^3)\sin(4x),\ a=0,\ b=0.5\pi$;

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{1+\cos^2(4x)}-1,\ a=0,\ b=0.25\pi$; 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}}{1+\sin^2(4x)}-0.6,\ a=0.5,\ b=1.2$.

Задача 4.2. Решить систему методом Ньютона. Результаты получить с 5 верными знаками.

$tg(xy+\beta)=x^2,\quad \alpha x^2+2y^2=1,\quad x>0,\quad y>0,\quad \alpha=0.5+0.1\cdot m,\quad \beta=0.1\cdot n.$ **Варианты задания:**

1) $m=0, n=1$; 2) $m=1, n=2$; 3) $m=2, n=3$; 4) $m=3, n=4$; 5) $m=4, n=5$; 6) $m=5, n=0$;

7) $m=3, n=1$; 8) $m=4, n=2$.

Указание: привести систему к каноническому виду, вычислить производные, якобиан и обратное преобразование, выписать формулы итераций, провести вычисления. Начальное приближение $x_0=0.5,\ y_0=0.5$.

Задача 4.3. В области $D=[-0.3,0.3]\times[-0.3,0.3]\times[-0.3,0.3]$ найти решение системы

$x+x^2-(2+\alpha)yz=0.3,\quad y-y^2+(3-\alpha)xz=-0.2,\quad z+z^2+(2+\alpha)xy=0.2,\quad \alpha=0.05\cdot(m-1),$

методом простой итерации с параметром. Результаты получить с 5 верными знаками.

Варианты задания: m – номер варианта.

Задача 4.4. Проверить численно, что итерации (*) сходятся к функции (**) для заданного значения аргумента x (которое представляют в виде $x=2^m x_1,\ 0.5\le x_1<1$ или $1\le x_1<2$) и начального приближения y_0, оценить скорость сходимости. **Варианты задания:**

1) $(*): y_{n+1}=y_n(2-xy_n),\ (**): y=1/x,\ x=5,\ y_0=2^{-m}$;

2) $(*): y_{n+1}=0.5(y_n+x/y_n),\ (**): y=\sqrt{x},\ x=3,\ y_0=2^{[m/2]}$;

3) $(*): y_{n+1}=1.5y_n-0.5xy_n^3,\ (**): y=1/\sqrt{x},\ x=7,\ y_0=2^{-[m/2]}$;

4) $(*): y_{n+1}=(2y_n^3+x)/(3y_n^2),\ (**): y=\sqrt[3]{x},\ x=3,\ y_0=2^{[m/2]}$;

5) $(*): y_{n+1}=y_n\left[1+1/p-y_n^p/(px)\right],\ (**): y=\sqrt[p]{x},\ x=3,\ 0<y_0^p<(p+1)x,\ p=5$;

6) $(*): y_{n+1}=\left[(p-1)y_n/p+x/(py_n^{p-1})\right],\ (**): y=\sqrt[p]{x},\ x=5,\ \left|y_0-\sqrt[p]{x}\right|\le 0.01,\ p=5$;

7) $(*): y_{n+1}=\left[(p-1)y_n/p+x/(py_n^{p-1})\right],\ (**): y=\sqrt[p]{x},\ x=10,\ \left|y_0-\sqrt[p]{x}\right|\le 0.01,\ p=7$;

8) $(*): y_{n+1}=\left[p\cdot y_n/(p+1)+x/((p+1)y_n^p)\right],\ (**): y=\sqrt[p+1]{x},\ x=7,\ \left|y_0-\sqrt[p+1]{x}\right|\le 0.01,\ p=3$.

Указание: Вычислить несколько приближений для заданного x, а также отклонения $\Delta y_n=\left|y_n-y(x)\right|$, провести анализ убывания ошибки.

Задача 4.5. Найти все корни уравнения в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, лежащие в круге $|z|\le 12$. Результаты получить с 5 верными знаками. **Варианты задания:** 1) $\sin(z)=iz$; 2) $\cos(z)=z$; 3) $sh(z)=-z$; 4) $ch(z)=z$; 5) $\exp(z)=z^2$; 6) $\exp(iz)=z^3$; 7) $\ln z=\cos z$; 8) $\ln z=\sin z$.

Указание: перейти к системе уравнений для переменных (*x*,*y*), используя тождество $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и его следствия. Далее привести уравнения к каноническому виду и применить какой-либо итерационный метод.