## Тема 3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

**3.1. Метод простой итерации.**

$Ax = b \quad <=> \quad x = Cx + f$

$x^{k+1} = Cx^k + f, \quad k = 0,1,2,...$

Если $\sum_{j=1}^{N} |c_{ij}| \le \alpha < 1 \quad (i = 1,...,N)$ или $\sum_{i=1}^{N} |c_{ij}| \le \beta < 1 \quad (j = 1,...,N)$, то итерации сходятся при любом $x^0$.

Также справедливы оценки $\|x^k - x^*\|_C \le \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|x^k - x^{k-1}\|_C$ или $\|x^k - x^*\|_1 \le \dfrac{\beta}{1-\beta}\|x^k - x^{k-1}\|_1$.

Вычисление $C, f$:

1) деление строк на диагональные элементы: $c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}, \quad f_i = b_i / a_{ii}$;

2) $c_{ii} = 1 - a_{ii}, c_{ij} = -a_{ij}, f_i = b_i$;

3) каноническая схема: $c_{ii} = 1 - \tau a_{ii}, \quad c_{ij} = -\tau a_{ij}, \quad f_i = \tau b_i, \quad \tau \approx \dfrac{2}{\min\lambda(A) + \max\lambda(A)}$.

**3.2. Метод Зейделя.**

$Ax = b \quad <=> \quad x = Cx + f \quad => \quad x^{k+1} = C^- x^{k+1} + (D + C^+)x^k + f, \quad k = 0,1,2,...$

Условия сходимости и способ вычисления $C, f$ те же, что и в МПИ.

**3.3. Схема сопряженных градиентов**.

$$r^0 = Ax^0 - b, \quad \forall k = 0,1,2,...:$$

$$Bw^k = r^k,$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ (w^k, r^k)/(w^{k-1}, r^{k-1}), & k > 0, \end{cases} \qquad g^k = \begin{cases} w^k, & k = 0, \\ w^k + \beta_k g^{k-1}, & k > 0, \end{cases}$$

$$\alpha_k = (w^k, r^k)/(g^k, Ag^k), \quad x^{k+1} = x^k - \alpha_k g^k, \quad r^{k+1} = r^k - \alpha_k Ag^k.$$

Матрица $B$ выбирается из условия спектральной близости с $A$, но более просто обращается.

Примеры выбора $B$: $B = D_A, \quad B = (A^- + D_A), \quad B = (A^- + D_A)D_A^{-1}(D_A + A^+), \quad B \approx LU$.

Здесь $A = A^- + D_A + A^+$.

**3.4. Число обусловленности матрицы.**

Определение: $\mu(A) = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| / \inf\limits_{\|y\|=1}\|Ay\|$.

Оценить эту величину для матриц небольшой размерности можно непосредственно по следующим формулам: $\mu_C(A) = \max\limits_{x=x_k}\|Ax\|_C / \min\limits_{x=x_k}\|Ax\|_C$, где $\|\cdot\|_C$ – равномерная норма матрицы, $x_k$ – ненулевые векторы, координаты которых принимают только три значения 0, +1, -1. Количество различных векторов такого типа равно $3^N$. В случае комплексных матриц компоненты векторов принимают пять значений: 0, +1, -1, +i, -i.

### Задачи

**Задача 3.1.** Решить систему с матрицей $\overline{A}$ методом простой итерации. Условие окончания итераций $\|x^k - x^{k-1}\|_C \le \varepsilon = 10^{-4}$. Расчеты вести с точностью 5 знаков после запятой. **Указание:** В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Использовать каноническую схему итераций. Взять $\tau = 0.25$. В ответе указать вектор решения, итоговое число итераций $n(\varepsilon)$ и значение нормы невязки $\|r^n\| = \max\limits_{1\le i\le N}|Ay_i^n - b_i|$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2.12+\alpha & 0.42 & 1.34 & 0.88 & 11.172-\beta \\ 0.42 & 3.95+\alpha & 1.87 & 0.43 & 0.115+\beta \\ 1.34 & 1.87 & 2.98+\alpha & 0.46 & 9.009+\beta \\ 0.88 & 0.43 & 0.46 & 4.44+\alpha & 9.349-\beta \end{pmatrix}, \ \alpha = 0.1\cdot m, \ \beta = 0.25\cdot n.$$

**Варианты задания**: 1) $m = 0, n = 1$; 2) $m = 1, n = 2$; 3) $m = 2, n = 3$; 4) $m = 3, n = 4$; 5) $m = 4, n = 5$; 6) $m = 5, n = 0$, 7) $m = 3, n = 1$; 8) $m = 4, n = 2$.

**Задача 3.2.** Решить систему из задачи 3.1 методом Зейделя. Условие окончания итераций $\|x^k - x^{k-1}\|_C \le \varepsilon = 10^{-4}$. Расчеты вести с точностью 5 знаков после запятой. **Указание:** В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Использовать каноническую схему итераций. Взять $\tau = 0.25$. В ответе указать вектор решения, итоговое число итераций $n(\varepsilon)$ и значение нормы невязки. **Варианты задания**: те же.

**Задача 3.3.** Решить систему из задачи 3.1 методом сопряженных градиентов с оператором $B = D_A$. Условие окончания итераций $\|x^k - x^{k-1}\|_C \le \varepsilon = 10^{-4}$. Расчеты вести с точностью 5 знаков после запятой. **Указание:** В качестве начального приближения взять нулевой вектор. В ответе указать вектор решения, итоговое число итераций $n(\varepsilon)$ и значение нормы невязки. **Варианты задания**: те же.

**Задача 3.4.** Решить систему с эрмитовой матрицей $\overline{A}$ методом простой итерации. Условие окончания итераций $\|x^k - x^{k-1}\|_C \le \varepsilon = 10^{-4}$. Расчеты вести с точностью 5 знаков после запятой. В ответе указать вектор решения, итоговое число итераций $n(\varepsilon)$ и значение нормы невязки. **Указание:** В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Использовать каноническую схему итераций. Взять $\tau = 0.25$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2.5+\alpha & 0.2-i & 1.2+i & 0.5-i & 0.5i-\beta \\ 0.2+i & 3.5+\alpha & 1.5-i & 0.2+i & i+\beta \\ 1.2-i & 1.5+i & 3.5+\alpha & 0.3-i & i+\beta \\ 0.5+i & 0.2-i & 0.3+i & 2.5+\alpha & 0.5i-\beta \end{pmatrix}, \ \alpha = 0.25\cdot(m+1), \ \beta = 0.25\cdot n .$$

**Варианты задания**: те же.

**Задача 3.5.** Решить систему с несимметричной матрицей $\overline{A}$ методом простой итерации. Условие окончания итераций $\|x^k - x^{k-1}\|_C \le \varepsilon = 10^{-4}$. Расчеты вести с точностью 5 знаков после запятой. **Указание:** В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Использовать каноническую схему итераций. Взять $\tau = 0.25$. В ответе указать вектор решения, итоговое число итераций $n(\varepsilon)$ и значение нормы невязки.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2.2+\alpha & 0.2-\beta & 0.9+\beta & 0.7-\beta & 1.1 \\ 0.2+\beta & 3.3+\alpha & 1.3-\beta & 0.4+\beta & 2.2 \\ 0.9-\beta & 1.3+\beta & 4.4+\alpha & 0.3-\beta & 3.3 \\ 0.7+\beta & 0.4-\beta & 0.3+\beta & 5.5+\alpha & 4.4 \end{pmatrix}, \ \alpha = 0.2\cdot m, \ \beta = 0.1\cdot n .$$

**Варианты задания**: те же.

**Задача 3.6.** Оценить число обусловленности матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2.2+\alpha & 0.2-\beta & 0.9+\beta & 0.7-\beta \\ 0.2+\beta & 3.3+\alpha & 1.3-\beta & 0.4+\beta \\ 0.9-\beta & 1.3+\beta & 4.4+\alpha & 0.3-\beta \\ 0.7+\beta & 0.4-\beta & 0.3+\beta & 5.5+\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.5+\alpha & 0.2-i & 1.2+i & 0.5-i\beta \\ 0.2+i & 3.5+\alpha & 1.5-i\beta & 0.2+i \\ 1.2-i & 1.5+i\beta & 3.5+\alpha & 0.3-i \\ 0.5+i\beta & 0.2-i & 0.3+i & 2.5+\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0.25\cdot m, \quad \beta = 0.15\cdot m.$$

**Варианты задания**: m=1,2,3,4,5,6,7,8.