Тема 2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

2.1. Задача: $Ax = b, \quad x, b \in R^N, \quad A \in R^{N\times N}$ **.**

2.2. Метод Гаусса. ***Основная процедура, прямой ход*** (для системы размерности 3):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & a_{14}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(0)} / a_{11}^{(0)} & a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(0)} / a_{11}^{(0)} & a_{14}^{(1)} = a_{14}^{(0)} / a_{11}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - a_{21}^{(0)} a_{12}^{(1)} & a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - a_{21}^{(0)} a_{13}^{(1)} & a_{24}^{(1)} = a_{24}^{(0)} - a_{21}^{(0)} a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - a_{31}^{(0)} a_{12}^{(1)} & a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - a_{31}^{(0)} a_{13}^{(1)} & a_{34}^{(1)} = a_{34}^{(0)} - a_{31}^{(0)} a_{14}^{(1)} \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} / a_{22}^{(1)} & a_{24}^{(2)} = a_{24}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} a_{23}^{(2)} & a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - a_{32}^{(1)} a_{24}^{(2)} \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)} / a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Обратный ход: $x_3 = a_{34}^{(3)}$, $x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3$, $x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3$.

Метод Гаусса с контролем точности. Решают 2 системы – исходную и для $\bar{x} = x + (1,1,1)^T$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & a_{14}^{(0)} & a_{15}^{(0)} = a_{11}^{(0)} + a_{12}^{(0)} + a_{13}^{(0)} + a_{14}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} & a_{25}^{(0)} = a_{21}^{(0)} + a_{22}^{(0)} + a_{23}^{(0)} + a_{24}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & a_{35}^{(0)} = a_{31}^{(0)} + a_{32}^{(0)} + a_{33}^{(0)} + a_{34}^{(0)} \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & a_{15}^{(1)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} & a_{25}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & a_{35}^{(0)} \end{pmatrix}$$

Контроль точности: Вычисляем $\bar{a}_{15}^{(1)} = 1 + a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} + a_{14}^{(1)}$ и сравниваем с $a_{15}^{(1)}$. Если вычисления ведутся с точностью m знаков после запятой, то $\left| a_{15}^{(1)} - \bar{a}_{15}^{(1)} \right| \le 10^{-m}$. Если оценка не верна, уточняют результаты деления на $a_{11}^{(0)}$, увеличивая m на единицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & a_{15}^{(1)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} & a_{25}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & a_{35}^{(0)} \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & a_{15}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} \end{pmatrix}.$$ ***Контроль***: $\bar{a}_{i5}^{(1)} = a_{i2}^{(1)} + a_{i3}^{(1)} + a_{i4}^{(1)}, \quad \left| a_{i5}^{(1)} - \bar{a}_{i5}^{(1)} \right| \le 10^{-m}\ ? \quad (i = 2, 3).$

И т.д., чередуя вычисления и операции контроля. ***На обратном ходе контроль не нужен***.

В результате находятся x и $\bar{x}$, отличающиеся покомпонентно на 1 с точностью 10^{-m}.

Метод Гаусса с выбором главного элемента. Прямой ход проводится начиная не с первой строки, а с той, один из элементов которой является наибольшим по модулю. Выбор очередной строки производится на каждом шаге процедуры прямого хода.

2.3. Метод Холецкого (LU-разложение):

$Ax = b \quad (A = LU) \quad <=> \quad Ly = b, \quad Ux = y.$

Формулы для получения матричных элементов и решения:

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \ge j > 1), \quad l_{ij} = 0 \quad (i < j); \quad u_{ii} = 1, \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (1 < i < j),$$

$$u_{ij} = 0 \quad (i > j); \quad y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right), \quad x_N = y_N, \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{N} u_{ik} x_k.$$

LU-разложение размерности 3:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} = a_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} = a_{21} & l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} & 0 \\ l_{31} = a_{31} & l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} & l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} = a_{12} / a_{11} & u_{13} = a_{13} / a_{11} \\ 0 & 1 & u_{23} = (a_{23} - l_{21} u_{13}) / l_{22} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компактная схема хранения: $$\begin{pmatrix} l_{11} = a_{11} & u_{12} = a_{12} / a_{11} & u_{13} = a_{13} / a_{11} \\ l_{21} = a_{21} & l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} & u_{23} = (a_{23} - l_{21} u_{13}) / l_{22} \\ l_{31} = a_{31} & l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} & l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} \end{pmatrix}.$$

2.4. Метод квадратных корней (метод Холецкого для симметричной матрицы).

$Ax = b \quad (A = A^T > 0, \quad A = S^T S) \quad <=> \quad S^T y = b, \quad Sx = y;$

Формулы для получения матричных элементов и решения:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2}, \quad s_{ij} = \frac{1}{s_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} \right);$$

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{s_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} y_k \right), \quad x_N = \frac{y_N}{s_{NN}}, \quad x_i = \frac{1}{s_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{N} s_{ik} x_k \right).$$

Матрица S размерности 4:

$$S=\begin{pmatrix} s_{11}=\sqrt{a_{11}} & s_{12}=a_{12}/s_{11} & s_{13}=a_{13}/s_{11} & s_{14}=a_{14}/s_{11} \\ 0 & s_{22}=\sqrt{a_{22}-s_{12}^2} & s_{23}=\left(a_{23}-s_{12}s_{13}\right)/s_{22} & s_{24}=\left(a_{24}-s_{12}s_{14}\right)/s_{22} \\ 0 & 0 & s_{33}=\sqrt{a_{33}-s_{13}^2-s_{23}^2} & s_{34}=\left(a_{34}-s_{13}s_{14}-s_{23}s_{24}\right)/s_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}=\sqrt{a_{44}-s_{14}^2-s_{24}^2-s_{34}^2} \end{pmatrix}.$$

2.5. Вычисление определителей.

$\Delta=\det A=a_{11}a_{22}^{(1)}...a_{NN}^{(N-1)}$, где $a_{kk}^{(k-1)}$ – элементы главной диагонали, полученные методом Гаусса.

Решение эквивалентно процедуре Гаусса при нулевой правой части.

$\Delta=\det A=\det S^T\cdot\det S=\left(\det S\right)^2=\left(s_{11}...s_{NN}\right)^2$ – применение МКК для симметричной матрицы.

2.6. Вычисление обратных матриц.

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$, E – единичная матрица. Поэтому можно решать методом Гаусса N систем: $AX=E$.

Задачи

Задача 2.1. Решить систему методом Гаусса с контролем точности. Расчеты вести с пятью знаками после запятой. $\overline{A}=\begin{pmatrix} 8.64-\alpha & 1.71 & 5.42 & 10.21-\beta \\ -6.39 & 4.25 & 1.84+\alpha & 3.41+\beta \\ 4.21 & 7.92-\alpha & -3.41 & 12.29 \end{pmatrix}$, $\alpha=0.25\cdot m$, $\beta=0.2\cdot n$.

Варианты задания: 1) $m=0, n=1$; 2) $m=1, n=2$; 3) $m=2, n=3$; 4) $m=3, n=4$; 5) $m=4, n=5$; 6) $m=5, n=0$; 7) $m=3, n=1$; 8) $m=4, n=2$. **Указание:** вывести $x,\overline{x},\delta=x-\overline{x}-(1,...,1)^T$.

Задача 2.2. Решить систему методом Гаусса с выбором главного элемента и контролем точности. Расчеты вести с пятью знаками после запятой. $\overline{A}=\begin{pmatrix} 4.21 & 22.42+\alpha & 3.85 & 30.24 \\ 2.31 & 31.49 & 1.52 & 40.95-\beta \\ 3.49 & 4.85 & 28.72+\alpha & 42.81 \end{pmatrix}$, $\alpha=0.25\cdot m$, $\beta=0.35\cdot n$. **Варианты задания**: те же. **Указание:** вывести $x,\overline{x},\delta=x-\overline{x}-(1,...,1)^T$.

Задача 2.3. Решить систему из задачи 2.1. методом Холецкого с контролем точности. Расчеты вести с пятью знаками после запятой. **Варианты задания**: те же. **Указание:** вывести $L,U,LU-A,x,\overline{x},\delta=x-\overline{x}-(1,...,1)^T$.

Задача 2.4. Решить систему методом квадратных корней. Расчеты вести с пятью знаками после запятой.

$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2.12+\alpha & 0.42 & 1.34 & 0.88 & 11.172-\beta \\ 0.42 & 3.95+\alpha & 1.87 & 0.43 & 0.115+\beta \\ 1.34 & 1.87 & 2.98+\alpha & 0.46 & 9.009+\beta \\ 0.88 & 0.43 & 0.46 & 4.44+\alpha & 9.349-\beta \end{pmatrix}$, $\alpha=0.1\cdot m$, $\beta=0.25\cdot n$. **Варианты задания**: те же.

Указание: вывести $S,SS^*-A,r=Ax-b$.

Задача 2.5. Используя метод Гаусса вычислить определитель. Расчеты вести с пятью знаками после запятой.

$\Delta=\begin{vmatrix} 3.81 & 0.25 & 1.28 & 0.75+\alpha \\ 2.25 & 1.32 & 4.58+\alpha & 0.49 \\ 5.31 & 6.28+\alpha & 0.98 & 1.04 \\ 9.39+\alpha & 2.45 & 3.35 & 2.28 \end{vmatrix}$, $\alpha=0.5\cdot m.$ **Варианты задания:** m=1,2,3,4,5,6,7,8.

Указание: вывести результирующую верхнюю треугольную форму определителя.

Задача 2.6. Методом Гаусса вычислить матрицу обратную данной. Расчеты вести с пятью знаками после запятой.

$A=\begin{pmatrix} 24.21+\alpha & 2.42 & 3.85 \\ 2.31 & 31.49 & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72+\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha=0.1\cdot m.$ **Варианты задания:** m=1,2,3,4,5,6,7,8. **Указание:** вывести матрицу $\delta=AA^{-1}-E$.

Задача 2.7. Методом Гаусса вычислить матрицу обратную данной. Расчеты вести с пятью знаками после запятой.

$A=\begin{pmatrix} 23.25+i\alpha & 1.42 & 3.87-i\alpha \\ 4.31 & 25.43 & 1.52 \\ 1.49-i\alpha & 4.85 & 22.71+i\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha=0.1\cdot m.$ **Варианты задания:** m=1,2,3,4,5,6,7,8. **Указание:** вывести матрицу $\delta=AA^{-1}-E$.