Тема 1. Приближенный анализ.

1.1. Абсолютная и относительная погрешность.

Абсолютной погрешностью числа a, приближающего число a_0, называют величину Δ_a, которая удовлетворяет неравенству $|a-a_0|\le\Delta_a$. ***Относительной погрешностью*** числа $a\ne 0$, приближающего число a_0, называют величину $\delta_a=\Delta_a/|a|$.

Следствия из правила округления:

1) Если число задано с точностью до *m* десятичных цифр, то его абсолютная погрешность не превосходит половины единицы младшего десятичного разряда.
2) Если число задано с точностью до *m* верных десятичных цифр (знаков), то его абсолютная погрешность не превосходит единицы младшего верного десятичного разряда (знака).
3) Округление до m десятичных цифр (знаков), до m верных десятичных цифр (знаков) и до m значащих десятичных цифр (знаков) в общем случае не совпадают.

Пример для m=4: $0.015827\approx 0.016, 0.015, 0.01583$.

1.2. Алгебраические суммы.

Абсолютная погрешность алгебраической суммы $S=a_1+...+a_n$ равна $\Delta_S=\Delta_{a_1}+...+\Delta_{a_n}$.

Правило Чеботарева: Если все слагаемые округлены до *m*-го десятичного разряда, то справедлива ***статистическая оценка погрешности*** $\Delta_S=\sqrt{3n}\cdot 0.5\cdot 10^{-m},\quad n>10.$

Правило 2: Если в сумме абсолютная погрешность одного из слагаемых много больше других, то все слагаемые можно округлить до такой же точности.

Относительная погрешность алгебраической суммы удовлетворяет неравенствам:
$\min\delta_{a_k}\le\delta_S\le\max\delta_{a_k},\quad a_k>0,\quad k=1,2,...,n.$

1.3. Умножение и деление чисел.

1) При умножении и делении приближенных чисел их относительные погрешности складываются.
2) Относительная погрешность выражения $r=(a_1a_2...a_m)/(b_1b_2...b_n)$ оценивается суммой всех относительных погрешностей: $\delta_r=\delta_{a_1}+...+\delta_{a_m}+\delta_{b_1}+...+\delta_{b_m}$. Абсолютная погрешность $r=(a_1a_2...a_m)/(b_1b_2...b_n)$ вычисляется по относительной погрешности: $\Delta_r=|r|\delta_r$.
3) Если все относительные погрешности равны δ, то справедлива ***статистическая оценка***: $\delta_r=\sqrt{3(n+m)}\delta,\quad n+m>10$.

1.4. Погрешность вычисления функции.

1) Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y=f(x)$ оценивается через погрешность аргумента: $\Delta_y=|f'(x)|\Delta_x$. Относительная погрешность положительной дифференцируемой функции равна $\delta_y=\left[|f'(x)|/f(x)\right]\Delta_x=|[\ln f(x)]'|\Delta_x=|[\ln f(x)]'||x|\delta_x$. Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y=f(x_1,...,x_n)$ равна $\Delta_y=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}$. Относительная погрешность положительной дифференцируемой функции равна $\delta_y=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\ln f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\ln f}{\partial x_i}\right||x_i|\delta_{x_i}$.

2) Для вычисления неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $F(x,y)=0$ можно использовать метод итераций: $y_{n+1}=y_n-F(x,y_n)/F_y'(x,y_n),\quad n=0,1,2,...$ Итерации сходятся, если $F_y'(x,y), F_{yy}''(x,y)$ существуют и сохраняют постоянные знаки вблизи корня $y(x)$. Итерации продолжают, пока $|y_{n+1}-y_n|>\varepsilon$.

Задачи

Задача 1.1. Длина (a) и ширина (b) комнаты измерены с точностью до 1см. Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления площади $S=ab$. Округлить S до верных знаков. **Варианты**:
1) $a=5.82\text{м}, b=4.26\text{м}$; 2) $a=4.37\text{м}, b=3.51\text{м}$; 3) $a=8.95\text{м}, b=7.33\text{м}$; 4) $a=3.58\text{м}, b=2.93\text{м}$;
5) $a=4.64\text{м}, b=4.19\text{м}$; 6) $a=6.11\text{м}, b=5.46\text{м}$; 7) $a=5.17\text{м}, b=3.29\text{м}$; 8) $a=2.12\text{м}, b=9.93\text{м}$.

Задача 1.2. Представление вещественных чисел в некоей ЭВМ реализовано с точностью до четырех значащих цифр. Определить с какой абсолютной погрешностью вводятся числа:
1) $\pi=3.14159265..., a=1/3$; 2) $e=2.718281828..., a=1/7$; 3) $\ln 10=2.30258509..., a=1/11$;
4) $\sqrt{2}=1.41421356..., a=1/13$; 5) $\sqrt{3}=1.73205080..., a=1/15$; 6) $\sin 35^0=0.57357643..., a=1/17$;
7) $\sqrt{5}=2.23606797..., a=-1/19$; 8) $\sqrt{7}/2=1.32287565..., a=\cos 42^0=0.74314482...$

Задача 1.3. Округлить числа до трёх значащих и до трёх верных цифр, вычислить абсолютные и относительные погрешности:

1) $a = -2.1514,\ b = 0.16152$; 2) $a = 0.01204,\ b = 1.225$; 3) $a = -0.0015281,\ b = 392.85$; 4) $a = -0.1545,\ b = 0.003922$;

5) $a = 625.55,\ b = -94.525$; 6) $a = -12.645,\ b = 0.01723$; 7) $a = -100.605,\ b = 0.019261$; 8) $a = -0.8093, b = 0.01918$.

Задача 1.4. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям:

1) $a = 13267, \delta = 0.1\%$; $b = -1.349, \delta = 0.31\%$; 2) $a = -2.32, \delta = 0.7\%$; $b = 0.111, \delta = 1.32\%$;

3) $a = 35.72, \delta = 1\%$; $b = -0.1234, \delta = 0.23\%$; 4) $a = -0.896, \delta = 10\%$; $b = 899.2, \delta = 0.52\%$;

5) $a = 232.44, \delta = 1\%$; $b = -15.235, \delta = 0.12\%$; 6) $a = -23.18, \delta = 3\%$; $b = 0.991, \delta = 0.41\%$;

7) $a = 219.2, \delta = 4\%$; $b = -1.623, \delta = 0.11\%$; 8) $a = -0.452, \delta = 0.33\%$; $b = 14.12, \delta = 0.13\%$.

Задача 1.5. Определить число верных знаков в числе по известной абсолютной или относительной погрешности:

1) $a = 0.3941, \Delta_a = 0.0025, b = -1.8921, \delta_b = 0.001$; 2) $a = -0.1132, \Delta_a = 0.0001, b = 0.2218, \delta_b = 0.02$;

3) $a = 38.2543, \Delta_a = 0.0027, b = -22.351, \delta_b = 0.1$; 4) $a = -293.481, \Delta_a = 0.1, b = 0.02425, \delta_b = 0.005$;

5) $a = 2.325, \Delta_a = 0.0001, b = -9.3598, \delta_b = 0.01\%$; 6) $a = -32.285, \Delta_a = 0.002, b = 14.9360, \delta_b = 1\%$;

7) $a = 1.799, \Delta_a = 0.002, b = -1.2197, \delta_b = 0.03\%$; 8) $a = -13.045, \Delta_a = 0.05; b = 0.3128, \delta_b = 0.4\%$.

Задача 1.6. Найти сумму приближенных чисел и указать её абсолютную и относительную погрешности, считая все знаки верными:

1) $S = 0.145 + 321 + 78.2$; 2) $S = 0.301 + 193.1 + 11.58$; 3) $S = 1.245 + 349 + 78.12$; 4) $S = 0.151 + 22.2 + 174.52$;

5) $S = 3.31 + 204.1 + 17.585$; 6) $S = 18.890 + 321 + 35.1$; 7) $S = 0.999 + 9.99 + 99.9$; 8) $S = 1.309 + 0.349 + 98.94$.

Задача 1.7. Найти сумму приближенных чисел $S = x_1 + x_2 - x_3$ и указать её абсолютную и относительную погрешности:

1) $x_1 = 197.6, \Delta_{x_1} = 0.2, x_2 = 23.44, \Delta_{x_2} = 0.22,\ x_3 = 201.55, \Delta_{x_3} = 0.17$;

2) $x_1 = 101.85, \Delta_{x_1} = 0.15, x_2 = 25.32, \Delta_{x_2} = 0.11,\ x_3 = 151.51, \Delta_{x_3} = 0.15$;

3) $x_1 = 123.4, \Delta_{x_1} = 0.1, x_2 = 20.04, \Delta_{x_2} = 0.05,\ x_3 = 105.4, \Delta_{x_3} = 0.1$;

4) $x_1 = 117.84, \Delta_{x_1} = 0.25, x_2 = 21.18, \Delta_{x_2} = 0.02,\ x_3 = 183.23, \Delta_{x_3} = 0.07$;

5) $x_1 = 212.35, \Delta_{x_1} = 0.05, x_2 = 32.4, \Delta_{x_2} = 0.1,\ x_3 = 211.15, \Delta_{x_3} = 0.06$;

6) $x_1 = 168.11, \Delta_{x_1} = 0.01, x_2 = 15.035, \Delta_{x_2} = 0.005,\ x_3 = 171.125, \Delta_{x_3} = 0.003$;

7) $x_1 = 133.46, \Delta_{x_1} = 0.02, x_2 = 18.045, \Delta_{x_2} = 0.005,\ x_3 = 89.537, \Delta_{x_3} = 0.002$;

8) $x_1 = 13.465, \Delta_{x_1} = 0.023, x_2 = 3.74, \Delta_{x_2} = 0.01,\ x_3 = 0.1341, \Delta_{x_3} = 0.0002$.

Задача 1.8. Найти произведения и частные двух чисел и указать их относительные погрешности, считая все знаки верными:

1) $a = 3.49 \cdot 8.6, b = 5.684 : 5.032$; 2) $a = 25.1 \cdot 1.743, b = 0.144 : 1.2$; 3) $a = 0.02 \cdot 16.5, b = 216 : 4.5$;

4) $a = 0.253 \cdot 654, b = 726.676 : 829$; 5) $a = 1.78 \cdot 1.183, b = 754.936 : 36.5$; 6) $a = 482.56 \cdot 0.0052, b = 7.3 : 4491$;

7) $a = 93.17 \cdot 0.013, b = 17.3 : 119$; 8) $a = 3.152 \cdot 0.43, b = 11.38 : 94.5$.

Задача 1.9. Вычислить значение функции и найти его абсолютную и относительную погрешности.

1) $y = x^3 \sin x, x = \sqrt{2} \approx 1.414$; 2) $y = x \ln x, x = \pi \approx 3.142$; 3) $y = e^x \cos x, x = \sqrt{3} \approx 1.732$;

4) $y = x^{-3} \sin x, x = \sqrt{2} \approx 1.414$; 5) $y = x / \ln x, x = \pi \approx 3.142$; 6) $y = 2^{-x} \cos x, x = \sqrt{3} \approx 1.732$;

7) $y = sh\, x / x, x = \pi / 8 \approx 0.393$; 8) $y = 3^{-x} \sin x, x = \sqrt{5} \approx 2.236$.

Задача 1.10. Вычислить значение функции и найти его абсолютную и относительную погрешности.

1) $u = x_3 \ln(x_1 + x_2^2), x_1 = 0.97, x_2 = 1.132, x_3 = 1.54$; 2) $u = (x_1 + x_2^2) / x_3, x_1 = 3.28, x_2 = 0.932, x_3 = 1.132$;

3) $u = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, x_1 = 2.104, x_2 = 1.935, x_3 = 0.845$; 4) $u = x_3 + \cos(x_1 + x_2), x_1 = 0.97, x_2 = 1.132, x_3 = 1.54$;

5) $u = x_3 sh(x_1 - x_2), x_1 = 1.35, x_2 = 0.541, x_3 = 0.932$; 6) $u = x_3 ch(x_1 / x_2), x_1 = 1.235, x_2 = 0.82, x_3 = 0.534$;

7) $u = (e^{x_1} - e^{x_2}) / x_3, x_1 = 1.031, x_2 = 0.98, x_3 = 0.018$; 8) $u = arctg\left(x_1 + x_2 / x_3\right), x_1 = 0.17, x_2 = 1.24, x_3 = 1.513$.