Тема 2. Методы анализа математических моделей

Лекция 8. Методы решения некорректных и обратных задач

1. Определение и примеры некорректных задач.

Абстрактное уравнение:

$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad A: U \to F.$ (1)

U, F – метрические пространства, A – непрерывный оператор.

Задача называется корректно поставленной, если

1) уравнение (1) разрешимо для всех $f \in F$;

2) решение единственно;

3) решение устойчиво по возмущению правой части, т.е. малым в метрике пространства F возмущениям правой части f соответствуют и малые в метрике пространства U возмущения решения u.

Если в корректно поставленной задаче вместо "точной" правой части f имеется ее приближение значение f_δ, то существует элемент u_δ, который при $\delta \to 0$ удовлетворяет условию $u_\delta \to u$. В качестве такого элемента выступает $u_\delta = A^{-1} f_\delta$.

Под некорректной задачей решения уравнения (1) понимается любая такая задача, в которой не выполняется хотя бы одно из перечисленных трех условий корректности.

Некорректная задача – задача, решение которой либо не существует, либо не является единственным, либо не является устойчивым по входным данным.

1.1 Примеры из линейной алгебры

$u_1 + 7u_2 = 5, \quad \sqrt{3}u_1 + \sqrt{147}u_2 = \sqrt{75}$.

Точное нормальное, т.е. наименее уклоняющееся от нуля, решение этой системы из двух зависимых уравнений равно (0.1, 0.7).

$u_1 + u_2 = 1, \quad (1+\mu)u_1 + u_2 = 1 + \delta$.

Точное решение $u_1 = \delta / \mu, \quad u_2 = 1 - \delta / \mu$ неустойчиво при произвольных малых δ и μ.

1.2 Пример интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$Au = \int_a^b K(x,s)u(s)\,ds = f(x), \quad c \le x \le d.$$

$u \in C[a,b], \; f \in L_2[c,d]$.

Здесь нарушается и 1), и 3).

1.3 Пример УРЧП

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y > 0;$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2. Методы решения некорректных задач

Общая методика – построение регуляризирующего оператора.

$A_h u_h = f_h, \quad u_h \in U_h, \quad f_h \in F_h, \quad A_h : U_h \to F_h.$ (2)

При этом в каком-то смысле должно выполняться $u_h \to u$ при $h \to 0$.

Метод регуляризации Тихонова:

1) Необходимо операторное уравнение свести к вариационной задаче:

$\Phi(u, A, f) = \|Au - f\|^2 \to \min$.

2) Затем применить метод регуляризации:

$\Phi(u_h, A_h, f_h) = \Phi(u_h, A_h, f_h) + \alpha \|u_h\|^2 \to \min$.

Методы решения: градиентные, координатные, стохастические, смешанного типа.

3. Понятие обратной задачи.

Обратная задача - задача, в которой неизвестны некоторые параметры оператора и правой части, но известны отдельные параметры решения (наблюдаемые данные).

$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad A: U \to F.$ (1)

В (1) неизвестны отдельные параметры $A = A(p_1, ..., p_n)$ и $f = f(q_1, ..., q_m)$, но известны отдельные решения $u = u(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_m)$.

Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ и задачи по неразрушающему контролю.

Обратные задачи являются некорректно поставленными задачами. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее. В функциональном анализе обратная задача представляется в виде отображения между метрическими пространствами. Обратные задачи обычно формулируются в бесконечномерных пространствах, но ограничение на конечность измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к дискретным обратным задачам.

4. Методы решения обратных задач.

Общая методика:

- либо сведение решения к множеству прямых задач;
- либо регуляризация по Тихонову.