Тема 2. Методы анализа математических моделей
Лекция 4. Обзор методов механики сплошных сред.
1. Модельная задача

$$\Delta u = -f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$u = g, \quad (x, y) \in \partial D$$

2. Полуаналитические методы.
2.1. Решение дифференциальных задач с помощью рядов.

Если $D = [0,1] \times [0,1]$, то можно разложить все функции в ряд Тейлора:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_{10}(x - x_0) + u_{01}(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}u_{11}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}u_{20}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}u_{02}(y - y_0)^2 + \ldots$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \ldots$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \ldots$$

Обрываем ряд $u(x, y)$ и ищем неизвестные коэффициенты из уравнения и граничных условий, приравнивая члены при одинаковых скобках:

$$\Delta u(x_0, y_0) = u_{20} + u_{02} + \left[u_{30} + \frac{1}{3}u_{12}\right](x - x_0) + \left[u_{03} + \frac{1}{3}u_{21}\right](y - y_0) + \ldots =$$

$$= f_{00} + f_{10}(x - x_0) + f_{01}(y - y_0) + \ldots$$

Получаем систему:

$$u_{00} = g_{00}, \quad u_{10} + \frac{1}{2}u_{11}^{*} = g_{10}^{*}, \quad u_{01} + \frac{1}{2}u_{11}^{**} = g_{01}^{**};$$

$$u_{20} + u_{02} = f_{00}, \quad u_{30} + \frac{1}{3}u_{12} = f_{10}, \quad u_{03} + \frac{1}{3}u_{21} = f_{01}, \ldots$$

Далее решаем систему линейных уравнений и находим решение в точке (x_0, y_0).

2.2. Преобразование и ряды Фурье.

Непрерывное преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{+i\omega x}d\omega;$$

Сохранение нормы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Двумерное преобразование:

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)e^{-i\omega_1 x - i\omega_2 y}dxdy.$$

Ряд Фурье:

$$f(x) = f(x + 2\pi): \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_n \cdot e^{inx}, \quad \hat{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx.$$

Дискретное преобразование Фурье.

$$f\left(x_k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-N}^{+N}\hat{f}_n\cdot e^{inx_k},\quad x_k=\frac{\pi k}{N},\quad k=-N,\ldots,+N;$$

$$\hat{f}_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{N}\sum_{k=-N}^{+N}f\left(x_k\right)\cdot e^{-inx_k},\quad n=-N,\ldots,+N.$$

2.3. Оконный анализ.

$F\left(t,\omega\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(\tau\right)\cdot W\left(t-\tau\right)d\tau$, W – оконная функция.

В большинстве задач цифровой обработки нет возможности исследовать сигнал на бесконечном интервале. Также ограничение интервала исследования может быть обусловлено нестационарностью исследуемого сигнала. Ограничение интервала анализа равносильно произведению исходного сигнала на оконную функцию. Таким образом, результатом оконного преобразования Фурье является не спектр исходного сигнала, а спектр произведения сигнала и оконной функции. Спектр, полученный при помощи оконного преобразования Фурье, является оценкой спектра исходного сигнала и принципиально допускает искажения. Искажения, вносимые применением окон, определяются размером окна и его формой. Выделяют два основных свойства частотных характеристик окон: ширина главного лепестка и максимальный уровень боковых лепестков. Применение окон, отличных от прямоугольного, обусловлено желанием уменьшить влияние боковых лепестков за счет увеличения ширины главного.

2.4. Вейвлет анализ

Вейвлет-преобразование – интегральное преобразование, которое представляет собой свертку вейвлет-функции с сигналом. Вейвлет-преобразование переводит сигнал из временного представления в частотно-временное. Способ преобразования функции (или сигнала) в форму, которая или делает некоторые величины исходного сигнала более поддающимися изучению, или позволяет сжать исходный набор данных. Вейвлетное преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа. Термин (англ. *wavelet*) в переводе с английского означает «маленькая волна». Вейвлеты — это обобщённое название математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте и в которых все функции получаются из одной базовой, изменяя её (сдвигая, растягивая).

Вейвлет преобразование также может быть непрерывное или дискретное.

2. Вариационные методы.

Вариационный метод — метод решения математических задач с помощью минимизации определенного функционала, используя пробную функцию, которая зависит от небольшого количества параметров.

Метод Рицца:

$$\Delta u=-f\left(x,y\right),\quad\left(x,y\right)\in D,$$

$$u=0,\quad\left(x,y\right)\in\partial D$$

$$\iint\limits_D\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right]dxdy=-\iint\limits_D f\,dxdy\quad\Leftrightarrow\quad\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds=-\iint\limits_D f\,dxdy,$$

$$\left(\Delta u,u\right)=\iint\limits_D\left[u\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right]dxdy=-\iint\limits_D f\,u\,dxdy=-\left(f,u\right).$$

$$J\left(u\right)=-\frac{1}{2}\left(\Delta u,u\right)-\left(f,u\right)=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-f\cdot u\right]dxdy\text{ – функционал.}$$

Далее вводим базис и раскладываем правую часть и решение по базису и ищем коэффициенты разложения:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mu_k(x,y),\quad f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k\mu_k(x,y),$$

$$J(\mathbf{C})=\iint_D\left[\left(-\frac{1}{2}\Delta\left(\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mu_k(x,y)\right)-\sum_{k=1}^{\infty}F_k\mu_k(x,y)\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{\infty}C_p\mu_p(x,y)\right)\right]dxdy.$$

Если базис ортогональный и совпадает с собственными функциями дифференциального оператора, то получаем относительно простую систему алгебраических уравнений для C_k:

$$J(\mathbf{C})=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}C_k^2\lambda_k-C_kF_k\right)\iint_D\mu_k^2dxdy\quad\Rightarrow\quad C_k=\frac{F_k}{\lambda_k}$$ – нетривиальное решение.

3. Сеточные методы.

3.1. Варианты сеточных методов

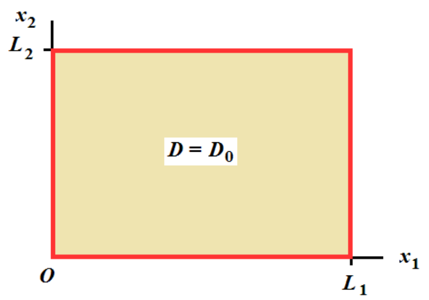
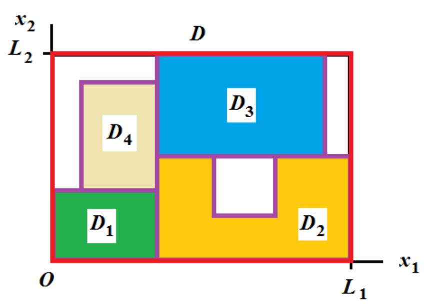
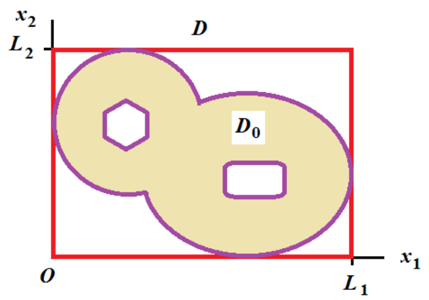
3.1.1. Метод конечных элементов (МКЭ) – вариационный метод, использующий сеточную дискретизацию области $\Omega\approx\Omega_h=\bigcup_{k=1}^{N}\Omega_k$ и разложение решения по базисным функциям $\varphi_{km}(x,y)$ сеточных элементов Ω_k: $u(x,y)=\sum_{k=1,m=1}^{N,M}C_{km}\varphi_{km}(x,y)$. Коэффициенты разложения C_{km} получаются из решения дискретной вариационной задачи, приводящей к решению СЛАУ.

3.1.2. Метод конечных разностей (МКР) – метод, использующий аппроксимации производных на сетке $\Omega\approx\bigcup_{k=1}^{N}\Omega_k$. В качестве решения получаем набор значений искомой функции на элементах сетки $\left\{u_{h,k}\approx u(x_k,y_k),\ \ (x_k,y_k)\in\Omega_k,\ \ k=1,\dots,N\right\}$. Приближенные значения искомой функции $u_{h,k}$ получаются из дискретных аналогов дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий.

3.1.3. Метод конечных объемов (МКО) – аналог метода конечных разностей на криволинейных сетках. Совпадает с методом конечных элементов при выборе линейных базисных функций $\varphi_{km}(x,y)$.

3.2. Пример на основе МКР (МКО).

Любой численный алгоритм существенно зависит от формы области, в которой решается задача.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Прямоугольная область</td>
<td>Область, составленная из прямоугольников</td>
<td>Область произвольной криволинейной формы</td>
</tr>
</table>

1) Численные методы в случае прямоугольной области:

$$\Lambda_h y_h=-\varphi_h\,,\ \ \Lambda_h y_h\equiv\sum_{\alpha=1}^{m}\Lambda_{h,\alpha}y_h\,,\ \ \Lambda_{h,\alpha}y_h=(\bar{k}_\alpha y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}\,,\ \ \vec{x}\in\Omega \tag{4}$$

Аппроксимация по времени: явные и неявные схемы.

$$\frac{\hat{y}_h-y_h}{\tau}=\sigma\left[\hat{\Lambda}_h\hat{y}_h+\hat{\varphi}_h\right]+(1-\sigma)\left[\Lambda_h y_h+\varphi_h\right],\ \ \vec{x}\in\Omega\,,\ \ t>0\,. \tag{5}$$

$$\frac{\hat{y}_h-2y_h+\breve{y}_h}{\tau^2}=\sigma\left[\hat{\Lambda}_h\hat{y}_h+\hat{\varphi}_h\right]+(1-2\sigma)\left[\Lambda_h y_h+\varphi_h\right]+\sigma\left[\breve{\Lambda}_h\breve{y}_h+\breve{\varphi}_h\right],\ \vec{x}\in\Omega\,,\ \ t>0\,. \tag{6}$$

Неявные схемы: прямые методы или итерационные.

2) Численные методы в областях, составленных из прямоугольников и параллелепипедов:

а) Метод нерегулярных шаблонов;

б) Метод фиктивных областей.

3) Численные методы в областях произвольной формы.

а) Метод нерегулярных шаблонов;
б) Метод фиктивных областей;
в) Нерегулярные сетки.

4. Безсеточные методы.

Методы частиц – обзор и примеры в отдельной лекции.

5. Информационная поддержка ВЭ (КЭ).

- подготовка ВЭ(КЭ), то есть создание вычислительной среды (платформы);
- комплексирование программных средств;
- реализация прикладных программ;
- обработка больших данных;
- методы анализа данных (визуализация, новые типы интерпретации, распознавание).