

Тема 1. Классификация и особенности математических моделей

Лекция 3. Моделирование в условиях неопределенности

1. Системы с недостатком и избытком данных.

Математический пример.

Недоопределённая система – система уравнений (алгебраических или дифференциальных), число уравнений в которой меньше числа неизвестных.

Переопределённая система – система, число уравнений (алгебраических или дифференциальных) которой больше числа неизвестных.

Пример: задача линейной алгебры $Ax = b$, с размерностью матрицы, не соответствующей размерности вектора неизвестных.

Для однозначного решения линейной системы уравнений необходимо, чтобы *ранг матрицы системы совпадал с размерностью вектора неизвестных*.

Если число уравнений меньше числа неизвестных, то такая система называется *неопределенной*. $2*x + y = 1$. Если число уравнений совпадает или больше числа неизвестных, то такая система может быть *недоопределена*, если некоторые уравнения не поставляют никакой дополнительной независимую от других уравнений информацию: $2*x + y = 1$, $4*x + 2*y = 2$, ...

Если число уравнений больше числа переменных, то система может быть *переопределена*, и ее точное решение отсутствует: $2*x + y = 1$, $3*x + y = 2$, $4*x + y = 3$.

В силу отсутствия точного решения переопределённых систем, на практике принято вместо него искать вектор, наилучшим образом удовлетворяющий всем уравнениям, то есть минимизирующий норму невязки системы в какой-либо степени, например, $\|Ax - b\|^2$.

Физический пример.

Клапан паровой машины. Паровая машина Уатта приводила в движение многие механизмы. Регулировку режимов ее работы осуществляли с помощью открытия/закрытия специального клапана. Совершенствование конструкции клапана сначала привело к повышению мощности паровых машин, но затем они начали взрываться без видимой причины. Поскольку управление было ручным, то подавать воду в котел необходимо было очень осторожно. Если открыть инжекторы до отказа, струи воды хлынут в перегретый котел с раскаленными, нагретыми докрасна стенками и трубами. В результате образуется сразу слишком большое количество пара, и в некоторых случаях быстрого действия предохранительного клапана может не хватить – давление образовавшегося пара просто разорвет котел.

Реликтовое излучение из космоса. Оно несет гигантский объем информации о раннем периоде развития вселенной. Это излучение накладывается на реальный ближний фон. В итоге последний не позволяет выделить отдельные объекты и события в раннем периоде развития. Корректная расшифровка большого потока информации требует гигантских усилий.

Социологический пример.

Эмоциональное состояние человека. Если у человека информация о важном для него деле или событии отсутствует или недостаточна, особенно в течение длительного времени, это приводит не только к беспокойству и возникновению напряженности, но и к нервным расстройствам, к увеличению числа ошибок и сбоев в работе.

Эксперимент американских ученых. Испытуемого поместили в комнату, изолированную от всех источников информации. В результате через 15 секунд датчики, установленные на теле человека, стали фиксировать изменение в дыхательных и сердечных ритмах. А через 30 секунд показатели стали такими, что в пору было вызывать реаниматологов.

При ощущении информационного дефицита у людей усиливается нервное возбуждение, учащается пульс, повышается температура, нередко возникает стресс. Связи между недостатком информации и эмоциональным напряжением, беспокойством с учетом ряда ограничений установил П.В. Симонов в информационной концепции эмоций. Это хорошо проявляется в сформулированной им формуле: $\text{Э} = \text{П}/\text{Ин} - \text{Ис}$, где Э – степень эмоционального напряжения; П – потребность в чем-либо; Ин – информация, основанная на прогнозе и необходимая для организации действий по реализации данной потребности; Ис – существующая в распоряжении информация, которая может быть использована для реализации действия.

Существуют и другие негативные последствия информационного дефицита, которые носят уже не только *психофизиологический (индивидуальный)*, но и *социальный (коллективный)* характер, что сказывается на эффективности работы людей, функционирования организаций.

Пример: Компания International Data Corporation (IDC) проанализировала финансовые последствия, обусловленные повторным выполнением интеллектуальной работы, недостатком эффективности и невозможностью найти необходимую информацию и специалистов. По оценкам, этот "дефицит информации" в 2000 г. обошелся компании "Fortuna 500" в совокупности в 16 млрд. долларов, а в 2003 г. цифра почти удвоилась, достигнув 31,5 млрд. долларов. Дефицит информации охватывает все большее количество сотрудников, так как доля тех, кто имеет дело непосредственно с информацией, непрерывно нарастает - с 20% в 1999 г. до более, чем 40% в 2003 г.

Переизбыток информации также может нанести значительный вред. Ученым порой требуются материальные затраты и время, чтобы обнаружить уже полученные результаты. Пример из медицинской науки. Установлено, что с 1870 г. число публикаций в биомедицинских журналах возрастало экспоненциально, увеличиваясь в 2 раза каждые 19 лет, т.е. в 4 раза за период профессиональной деятельности врача. Именно к биологии и медицине относятся наиболее часто цитируемые журналы; первое место по текущему импакт-фактору не раз принадлежало журналу "Clinical Research". В базе данных Science Citation Index лидируют биология и клиническая медицина, где только за 1981 - 1992 годы число публикаций составило более 9 и 7 млн. соответственно (для сравнения, по химии, как и по физике, - более 4 млн., по геологии - около 1 млн.). В этой ситуации поиск информации превращается в серьезную проблему.

Казалось бы, положение дел должно было измениться к лучшему с появлением Интернета - гигантского накопителя информации. Однако эти надежды не оправдались. Объемы информации в сети растут фантастическими темпами. В 2004 г. компания Google объявила о том, что проиндексировала около 10 млрд. документов. Но уже в августе 2005 г., по данным компании Yahoo, количество документов, подвергшихся индексации, составило почти 20 млрд., следовательно, только за год количество открытой, доступной пользователю информации удвоилось. При этом не учитывается подводная часть информационного айсберга, которую пока не удастся проиндексировать с помощью современных поисковых систем. Казалось бы, прекрасно – сколь угодно много информации, черпай ее по мере сил и возможностей и используй во благо. Но, как выразился один из исследователей Интернета, обращение к сети порой напоминает попытку "напиться из пожарного шланга".

Проанализируем цифры по отдельным областям жизнедеятельности людей, опубликованные американскими учеными:

- в мире ежедневно записывается около 20 млн. слов технической информации;
- на земле ежедневно выходит около 1000 наименований новых книг;
- за один час перед телевизором человек получает больше информационных образов, чем в доиндустриальном обществе;
- еженедельно издание New York Times содержит больше информации, чем прочитывал за всю свою жизнь средний англичанин в XVII-м веке;
- ежегодно в американских почтовых ящиках оказывается более 60 млрд. рекламных листов.

В целом оказывается, что системы с корректным соотношением исходных данных и законов их преобразования в результирующие данные составляют малое число от систем с недостатком и переизбытком данных. В математическом плане подобные ситуации приводят нас к *некорректным и обратным задачам*.

2. Некорректные задачи.

Корректно поставленная задача в математике – задача, математическое решение которой существует, единственно и устойчиво. Происходит от определения, данного Жаком Адамаром, согласно которому математические модели физических явлений должны иметь следующие свойства:

1. Решение существует.
2. Решение единственно.
3. Решение непрерывно зависит от входных данных в некоторой разумной топологии.

Некорректно поставленная задача – задача, не обладающая каким-либо из свойств корректно поставленной задачи.

Примеры типичных корректно поставленных задач в математической физике:

- внутренняя краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа;
- линейное уравнение диффузии с заданными начальными и граничными условиями.

Примеры некорректных задач в математической физике:

- внутренняя краевая задача Неймана для уравнения Лапласа (Пуассона);

– квазилинейное уравнение диффузии с заданными начальными и граничными условиями, описывающее режим с обострением (например, эволюцию языка пламени газовой горелки).

Заметим, что и корректные и некорректные задачи могут адекватно описывать реально протекающий физический процесс.

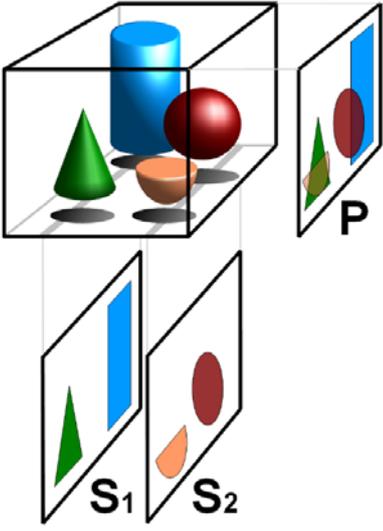
Даже если задача является корректно поставленной, она всё ещё может быть *плохо обусловленной*, то есть небольшая ошибка в исходных данных способна привести к много большим ошибкам в решениях. Плохо обусловленные задачи отличаются большим числом обусловленности. Если задача корректно поставлена, то имеется возможность её численного решения с использованием устойчивого алгоритма. Если же задача поставлена некорректно, то её постановку нужно изменить; обычно для этого вводятся некоторые дополнительные предположения (такие, как предположение о гладкости решения). Данная процедура называется *регуляризацией*, причём наиболее широко используется *регуляризация Тихонова*, применимая к линейным некорректно поставленным задачам.

3. Обратные задачи.

Среди некорректных задач выделяют особый класс – обратные задачи.

Обратная задача – задача, в которой значения параметров математической модели определяются из известных (наблюдаемых) величин.

Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ, задачи по неразрушающему контролю и т.д.

 <p>Томограммы (S1, S2) группы трёхмерных объектов и их проекция (P)</p>	<p><i>Вычислительная томография</i> - область математики, занимающаяся разработкой математических методов и алгоритмов реконструкции внутренней структуры объекта по проекционным данным - цифровым снимкам объекта, сделанным посредством многократного просвечивания этого объекта в различных пересекающихся направлениях. Внутренняя структура, как правило, представляется в воксельной форме. Получение массива вокселей по массиву проекционных снимков называется <i>прямой томографической задачей</i>. <i>Обратная томографическая задача</i> - формирование произвольного проекционного вида на основании известной внутренней структуры. Вычислительная томография – теоретическая основа <i>компьютерной томографии</i> – метода получения послойных изображений объекта в трёх плоскостях с возможностью их трёхмерной реконструкции. Чаще всего под компьютерной томографией подразумевается рентгеновская компьютерная томография.</p>
--	--

Обратные задачи являются некорректно поставленными задачами. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее. В функциональном анализе обратная задача представляется в виде отображения между метрическими пространствами. Обратные задачи обычно формулируются в бесконечномерных пространствах, но ограничение на конечность измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к изменению задачи в дискретной форме.

Пример обратной задачи – из уравнения теплопроводности найти начальное распределение температуры по конечным данным. Эта задача не является корректно поставленной, потому что её решение очень чувствительно к изменениям конечных данных.

4. Некорректные задачи в информационных системах

4.1 Вычислительные проблемы

Разрядность ЭВМ и накопление ошибок

Пример – дискретное преобразование Фурье

4.2 Проблемы больших данных

Объемы ОЗУ и внешней памяти

Высокопроизводительные системы

Отказоустойчивые алгоритмы

4.3 Нейронные сети

Динамическое обучение