

## Тема 1. Классификация и особенности математических моделей

### Лекция 1. Классификация и примеры математических моделей

#### 1. Введение в математическое моделирование

**Модель** – это материальный или мысленно представляемый (виртуальный) объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал, так что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Несколько определений термина "Моделирование".

**Моделирование** – процесс построения, изучения и применения моделей для исследования реальных (виртуальных) объектов, систем, процессов и явлений.

**Моделирование** является базовым методом познания с помощью объектов-заместителей.

**Моделирование** – современная научная методология исследования объектов, систем, процессов и явлений как окружающего нас реального мира, так и различных абстракций (виртуальных сущностей).

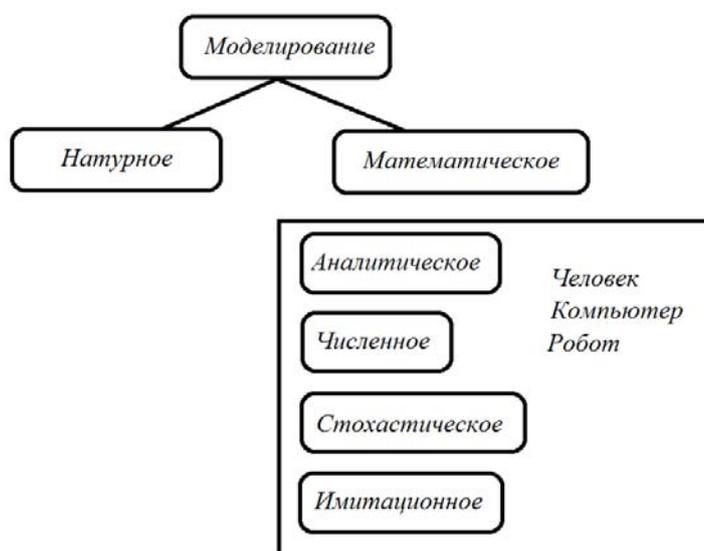


Рис. 1. Структурная схема методологии моделирования.

Моделирование подразделяется на ряд конкретных направлений (см. Рис. 1). Исторически первое направление связано с натурным моделированием, возникшим во времена становления "человека разумного". По сути моделирование отличает человеческий вид от других видов животного мира.

**Натурное (физическое) моделирование** – моделирование, при котором используется сам изучаемый объект (процесс, явление), либо подобный ему. Например, при изучении аэродинамических свойств летательного аппарата может использоваться как он сам, так и его модель, которые обтекаются потоками газа в аэродинамической трубе. И то, и другое относятся к натурному моделированию, поскольку не используют реальный полет.

**Математическое моделирование** – моделирование, при котором изучаемый объект (процесс, явление) заменяется математическим описанием (математической моделью), и это описание исследуется математическими методами.

**Математическое описание** в общем случае может включать:

а) текстовое описание на некотором языке (русский, английский и т.д.);

б) описание в виде последовательности специальных математических знаков и формул;

в) программу(ы) на алгоритмическом языке(ах);

г) визуализацию – рисунки, графики, диаграммы, многомерные изображения, видео, воспроизведенные на бумаге (кроме последнего) или на специальном устройстве;

д) файлы на компьютере (его аналоге), содержащие информацию по п. а)-г).

Математическая модель (описание) может быть *исследована(о)*:

а) *аналитическими методами* (устанавливаются явные зависимости между элементами модели, исходного объекта; получаются аналитические решения и/или связи; прогнозируются новые свойства и/или поведение);

б) *численными методами* (получаются неточные, но приближенные знания о модели и об исходном объекте – приближенные решения, примерные свойства, условные зависимости);

в) *стохастическими методами* (получаются вероятностные характеристики модели и изучаемого объекта);

г) *имитационными методами* (получается картина или прогноз поведения модели и изучаемого объекта);

д) *смешанными методами* (сочетание предыдущих методов).

**Аналитическое моделирование** – формирование моделей объектов (процессов, явлений) в виде математических соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, логических и т.д.) и их исследование аналитическими (теоретическими) методами, не допускающих появления ошибок в рамках принятой аксиоматики.

**Численное моделирование** – исследование математических моделей приближенными методами, допускающими появление погрешности.

**Стохастическое моделирование** – формирование и исследование стохастических (вероятностных) моделей, допускающими ненулевую вероятность ошибки.

**Имитационное моделирование** – воспроизведение (имитация) эволюции (функционирования) изучаемого объекта (процесса, явления) с соблюдением логической и временной последовательности протекания всех процессов.

Все виды математического моделирования может осуществлять человек, большую их часть – компьютер или робот. Робот отличается от компьютера возможностью выполнения некоторых действий в натуральном виде (например, подготовка документа, его печать и физическая передача бумажных экземпляров человеку).

На современном этапе большая часть математического моделирования выполняется человеком с помощью компьютеров и суперкомпьютеров. Поэтому возник термин – **компьютерное моделирование** – математическое моделирование, проводимое человеком с помощью компьютеров.

Современное ММ **базируется на математических методах**, однако включает в себе и другие методики, например, сбор и анализ информации об объектах исследования, развитие аппарата математических описаний и анализа конкретных математических задач, разработку алгоритмов и программ для вычислительных систем, компьютерную обработку данных.

Современная реализация математического моделирования с помощью вычислительной техники есть **вычислительный (компьютерный) эксперимент**.

Последний включает в себя бесконечно повторяющуюся последовательность следующих этапов исследования объектов (процессов, явлений):

- 1) сбор информации об объекте (процессе, явлении);
- 2) формулирование математического описания (модели) объекта (процесса, явления);
- 3) анализ математических описаний объекта различными способами, в том числе:
  - а) построение дискретной модели;
  - б) разработка алгоритма решения или воспроизведения;
  - в) программная реализация алгоритма;
  - г) вычисления или имитация с помощью программы;
- 4) сравнение полученных данных с оригиналом;
- 5) переход к п. 1) с учетом новых знаний.

Поскольку в настоящее время ни один из этих этапов не обходится без применения компьютерной обработки данных, то **компьютерный анализ** в этом контексте является одним из этапов, методов, средств математического моделирования.

## 2. Классификация и примеры математических моделей.

Все модели можно рассматривать по отношению к оригиналу (объекту исследования) в двух аспектах, соответствующих **внутреннему устройству моделей и связям моделей с оригиналом**. В соответствии с этим делением выделяют:

– характерные **особенности выражения** свойств оригинала и особенности функционирования модели,

– **основания для преобразования** свойств модели в свойства оригинала.

По характерным особенностям выражения свойств оригинала и особенностям функционирования модели подразделяются на:

– логические – построенные на принципах человеческой логики, из которых можно выделить:

- а) образные – дающие наглядное представление (например, образное представление животного, растения, здания и т.д. любым человеком),
- б) символные – использующие символы (например, языковые, математические, химические и т.д.),
- в) образно-символьные – схемы (например, карты, радиосхемы, блок-схемы программ и т.д.);

– материальные – построенные по объективным законам; из которых можно выделить:

- а) функциональные (например, протез коленного сустава),
- б) геометрические (например, самолет-игрушка),
- в) функционально-геометрические (например, модель самолета для исследований в аэродинамической трубе, модель скоростного катера для участия в соревнованиях радиоуправляемых моделей и т.д.).

По основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала модели подразделяются на:

– условные – на основе соглашения (например, система физических единиц измерения, система технической документации, математическая аксиоматика, алфавит и правила сложения слов какого-либо языка и т.д.);

– аналогичные – на основе логического вывода о сходстве (например, производная от функции по времени – это аналог скорости изменения функции);

– математические – на основе математического описания.

**Математические модели** основываются на **математическом описании** объекта. В **математическое описание**, прежде всего, входят взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде:

- символов, алфавитов, лингвистических систем,
- чисел и числовых множеств,
- явных и неявных вектор-функций,
- алгебраических уравнений и неравенств,
- геометрических и топологических параметров и их соотношений,
- обыкновенных дифференциальных уравнений,
- дифференциальных уравнений с частными производными,
- интегральных уравнений,
- систем уравнений различных типов,
- вычислительных или имитационных алгоритмов,
- вероятностных (стохастических) описаний,
- смешанных описаний.

**Математические модели** в зависимости от природы объекта, решаемых задач и применяемых методов, могут различаться следующими видами (признаками):

– *линейные* или *нелинейные* (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1, или любыми видами функций),

– *стационарные* или *нестационарные* (включающие независимые или зависящие от времени параметры),

– *непрерывные* или *дискретные* (включающие только непрерывные или только дискретные характеристики),

– *детерминированные* или *стохастические* (включающие точные, однозначные или вероятностные характеристики),

– *четкие* или *нечеткие* (включающие элементы четкой или нечеткой логики).

**Математическое описание** включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (**законы и закономерности**), но и полный набор числовых и функциональных **данных** объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также определенные **допущения (упрощения)** и **методы вычисления** выходных параметров модели. То есть под математическим описанием понимается **полная совокупность** данных, функций и методов вычисления, позволяющая **получать результат**.

### 3. Построение математических моделей.

Построение математических моделей обычно базируется на определенной аксиоматике и опирается на твердые факты (первые принципы), выраженные математическим способом. Например, при моделировании механических систем в качестве аксиоматики выбираются основные понятия линейной алгебры, аналитической геометрии, интегрального и дифференциального исчисления. В качестве первых принципов используются физические законы сохранения массы, импульса, энергии и т.д., выраженные в соответствующей аксиоматике математической форме.

Математические модели, основанные на первых принципах являются наиболее точными. Однако на практике их исследование представляет собой очень сложную и иногда неразрешимую задачу. Поэтому наряду с такими моделями используются **упрощенные или приближенные модели**.

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие *адекватности*. **Адекватность математической модели** – это полное или частичное **соответствие** результатов исследования модели свойствам (поведению) изучаемого реального (виртуального) объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования.

Приведем пример из теории механических систем. Для выявления адекватности математической модели для **механических систем и процессов**, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала **в одних и тех же условиях**.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием. Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала – механической системы – достаточно убедиться в выполнении двух свойств: **точности и непротиворечивости**.

**Точность** в задачах механики означает, что обобщенная характеристика **рассогласования** соответствующего параметра модели и оригинала ( $du = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ ) должна быть не больше, чем заранее заданное значение **приемлемой погрешности**.

**Непротиворечивость** подразумевает идентичный **характер изменения** соответствующих параметров, то есть идентичный вид основных **свойств** функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости.

В общем случае **адекватность модели** проверяется с помощью **статистических критериев**, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов исследования поведению изучаемого объекта в соответствующих условиях.

При математическом моделировании часто возникают различного рода *погрешности*, обусловленные следующими причинами:

– погрешности **физической абстракции** (неточность физических законов и закономерностей, непринятие во внимание дополнительных физических факторов и т.д.);

– погрешности **математического описания**:

а) **погрешность (неточность) модели** (приближенное выполнение тех или иных соотношений и связей),

б) **погрешность (неточность) входных данных**,

в) **погрешность расчетов** (погрешность вычислительных приборов и установок, приближенные методы вычислений);

г) **погрешность обработки результатов** (округление результатов, графическое изображение).

## **4. Некоторые общеизвестные классы математических моделей.**

### **4.1. Кинетические модели.**

#### **4.1.1. Уравнение Больцмана.**

Кинетическое уравнение Больцмана – уравнение, описывающее статистическое распределение частиц в газе или жидкости. Является одним из самых важных уравнений физической кинетики (области статистической физики, которая описывает системы, далёкие от термодинамического равновесия, например, в присутствии градиентов температур и электрического поля). Уравнение Больцмана используется для изучения переноса тепла и электрического заряда в жидкостях и газах, и из него выводятся транспортные свойства, такие как электропроводность, эффект Холла, вязкость и теплопроводность. Уравнение применимо для разреженных систем, где время взаимодействия между частицами мало (гипотеза молекулярного хаоса).

#### **4.1.2. Уравнение Фокера-Планка.**

### **4.2. Модели механики сплошных сред.**

#### **4.2.1. Уравнения классической механики**

#### **4.2.2. Уравнения квантовой механики**

#### **4.2.3. Уравнения для полей**

#### **4.2.4. Уравнения гидродинамики**

#### **4.2.5. Уравнения газовой динамики**

### **4.3. Модели частиц.**

### **4.4. Стохастические модели.**

### **4.5. Имитационные модели.**

Имитационные модели – математические модели, которые достаточно точно воспроизводят логическую схему и временную динамику поведения изучаемого объекта. Как правило они представляют собой либо алгоритм функционирования объекта (пассивная форма), либо исполняющийся в реальном времени программный код (активная форма).