

Тема 1. Классификация и особенности математических моделей

Лекция 1. Классификация и примеры математических моделей

1. Введение в математическое моделирование

Модель – это материальный или мысленно представляемый (виртуальный) объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал, так что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Несколько определений термина "Моделирование".

Моделирование – процесс построения, изучения и применения моделей для исследования реальных (виртуальных) объектов, систем, процессов и явлений.

Моделирование является базовым методом познания с помощью объектов-заместителей.

Моделирование – современная научная методология исследования объектов, систем, процессов и явлений как окружающего нас реального мира, так и различных абстракций (виртуальных сущностей).

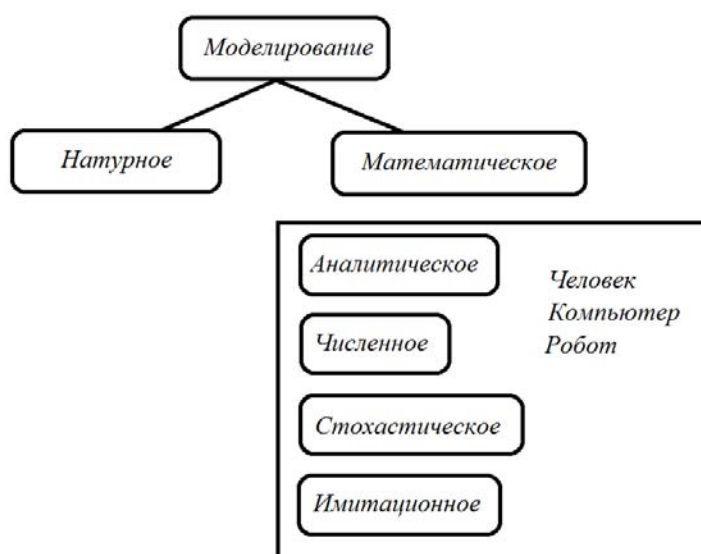


Рис. 1. Структурная схема методологии моделирования.

Моделирование подразделяется на ряд конкретных направлений (см. Рис. 1). Исторически первое направление связано с натурным моделированием, возникшим во времена становления "человека разумного". По сути моделирование отличает человеческий вид от других видов животного мира.

Натурное (физическое) моделирование – моделирование, при котором используется сам изучаемый объект (процесс, явление), либо подобный ему. Например, при изучении аэродинамических свойств летательного аппарата может использоваться как он сам, так и его модель, которые обтекаются потоками газа в аэродинамической трубе. И то, и другое относятся к натурному моделированию, поскольку не используют реальный полет.

Математическое моделирование – моделирование, при котором изучаемый объект (процесс, явление) заменяется математическим описанием (математической моделью), и это описание исследуется математическими методами.

Математическое описание в общем случае может включать:

а) текстовое описание на некотором языке (русский, английский и т.д.);

б) описание в виде последовательности специальных математических знаков и формул;

в) программу(ы) на алгоритмическом языке(ах);

г) визуализацию – рисунки, графики, диаграммы, многомерные изображения, видео, воспроизведенные на бумаге (кроме последнего) или на специальном устройстве;

д) файлы на компьютере (его аналоге), содержащие информацию по п. а)-г).

Математическая модель (описание) может быть *исследована(о)*:

а) *аналитическими методами* (устанавливаются явные зависимости между элементами модели, исходного объекта; получаются аналитические решения и/или связи; прогнозируются новые свойства и/или поведение);

б) *численными методами* (получаются неточные, но приближенные знания о модели и об исходном объекте – приближенные решения, примерные свойства, условные зависимости);

в) *стохастическими методами* (получаются вероятностные характеристики модели и изучаемого объекта);

г) *имитационными методами* (получается картина или прогноз поведения модели и изучаемого объекта);

д) *смешанными методами* (сочетание предыдущих методов).

Аналитическое моделирование – формирование моделей объектов (процессов, явлений) в виде математических соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, логических и т.д.) и их исследование аналитическими (теоретическими) методами, не допускающих появления ошибок в рамках принятой аксиоматики.

Численное моделирование – исследование математических моделей приближенными методами, допускающими появление погрешности.

Стохастическое моделирование – формирование и исследование стохастических (вероятностных) моделей, допускающими ненулевую вероятность ошибки.

Имитационное моделирование – воспроизведение (имитация) эволюции (функционирования) изучаемого объекта (процесса, явления) с соблюдением логической и временной последовательности протекания всех процессов.

Все виды математического моделирования может осуществлять человек, большую их часть – компьютер или робот. Робот отличается от компьютера возможностью выполнения некоторых действий в натуральном виде (например, подготовка документа, его печать и физическая передача бумажных экземпляров человеку).

На современном этапе большая часть математического моделирования выполняется человеком с помощью компьютеров и суперкомпьютеров. Поэтому возник термин – **компьютерное моделирование** – математическое моделирование, проводимое человеком с помощью компьютеров.

Современное ММ **базируется на математических методах**, однако включает в себе и другие методики, например, сбор и анализ информации об объектах исследования, развитие аппарата математических описаний и анализа конкретных математических задач, разработку алгоритмов и программ для вычислительных систем, компьютерную обработку данных.

Современная реализация математического моделирования с помощью вычислительной техники есть **вычислительный (компьютерный) эксперимент**.

Последний включает в себя бесконечно повторяющуюся последовательность следующих этапов исследования объектов (процессов, явлений):

- 1) сбор информации об объекте (процессе, явлении);
- 2) формулирование математического описания (модели) объекта (процесса, явления);
- 3) анализ математических описаний объекта различными способами, в том числе:
 - а) построение дискретной модели;
 - б) разработка алгоритма решения или воспроизведения;
 - в) программная реализация алгоритма;
 - г) вычисления или имитация с помощью программы;
- 4) сравнение полученных данных с оригиналом;
- 5) переход к п. 1) с учетом новых знаний.

Поскольку в настоящее время ни один из этих этапов не обходится без применения компьютерной обработки данных, то **компьютерный анализ** в этом контексте является одним из этапов, методов, средств математического моделирования.

2. Классификация и примеры математических моделей.

Все модели можно рассматривать по отношению к оригиналу (объекту исследования) в двух аспектах, соответствующих **внутреннему устройству моделей и связям моделей с оригиналом**. В соответствии с этим делением выделяют:

- характерные **особенности выражения** свойств оригинала и особенности функционирования модели,
- **основания для преобразования** свойств модели в свойства оригинала.

По характерным особенностям выражения свойств оригинала и особенностям функционирования модели подразделяются на:

- логические – построенные на принципах человеческой логики, из которых можно выделить:

- а) образные – дающие наглядное представление (например, образное представление животного, растения, здания и т.д. любым человеком),
- б) символные – использующие символы (например, языковые, математические, химические и т.д.),
- в) образно-символьные – схемы (например, карты, радиосхемы, блок-схемы программ и т.д.);

- материальные – построенные по объективным законам; из которых можно выделить:

- а) функциональные (например, протез коленного сустава),
- б) геометрические (например, самолет-игрушка),
- в) функционально-геометрические (например, модель самолета для исследований в аэродинамической трубе, модель скоростного катера для участия в соревнованиях радиоуправляемых моделей и т.д.).

По основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала модели подразделяются на:

- условные – на основе соглашения (например, система физических единиц измерения, система технической документации, математическая аксиоматика, алфавит и правила сложения слов какого-либо языка и т.д.);

- аналогичные – на основе логического вывода о сходстве (например, производная от функции по времени – это аналог скорости изменения функции);
- математические – на основе математического описания.

Математические модели основываются на **математическом описании** объекта. В **математическое описание**, прежде всего, входят взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде:

- символов, алфавитов, лингвистических систем,
- чисел и числовых множеств,
- явных и неявных вектор-функций,
- алгебраических уравнений и неравенств,
- геометрических и топологических параметров и их соотношений,
- обыкновенных дифференциальных уравнений,
- дифференциальных уравнений с частными производными,
- интегральных уравнений,
- систем уравнений различных типов,
- вычислительных или имитационных алгоритмов,
- вероятностных (стохастических) описаний,
- смешанных описаний.

Математические модели в зависимости от природы объекта, решаемых задач и применяемых методов, могут различаться следующими видами (признаками):

- *линейные* или *нелинейные* (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1, или любыми видами функций),
- *стационарные* или *нестационарные* (включающие независимые или зависящие от времени параметры),
- *непрерывные* или *дискретные* (включающие только непрерывные или только дискретные характеристики),
- *детерминированные* или *стохастические* (включающие точные, однозначные или вероятностные характеристики),
- *четкие* или *нечеткие* (включающие элементы четкой или нечеткой логики).

Математическое описание включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (**законы и закономерности**), но и полный набор числовых и функциональных **данных** объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также определенные **допущения (упрощения)** и **методы вычисления** выходных параметров модели. То есть под математическим описанием понимается **полная совокупность** данных, функций и методов вычисления, позволяющая **получать результат**.

3. Построение математических моделей.

Построение математических моделей обычно базируется на определенной аксиоматике и опирается на твердые факты (первые принципы), выраженные математическим способом. Например, при моделировании механических систем в качестве аксиоматики выбираются основные понятия линейной алгебры, аналитической геометрии, интегрального и дифференциального исчисления. В качестве первых принципов используются физические законы сохранения массы, импульса, энергии и т.д., выраженные в соответствующей аксиоматике математической форме.

Математические модели, основанные на первых принципах являются наиболее точными. Однако на практике их исследование представляет собой очень сложную и иногда неразрешимую задачу. Поэтому наряду с такими моделями используются **упрощенные или приближенные модели**.

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие *адекватности*. **Адекватность математической модели** – это полное или частичное **соответствие** результатов исследования модели свойствам (поведению) изучаемого реального (виртуального) объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования.

Приведем пример из теории механических систем. Для выявления адекватности математической модели для **механических систем и процессов**, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала **в одних и тех же условиях**.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием. Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала – механической системы – достаточно убедиться в выполнении двух свойств: **точности и непротиворечивости**.

Точность в задачах механики означает, что обобщенная характеристика **рассогласования** соответствующего параметра модели и оригинала ($du = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$) должна быть не больше, чем заранее заданное значение **приемлемой погрешности**.

Непротиворечивость подразумевает идентичный **характер изменения** соответствующих параметров, то есть идентичный вид основных **свойств** функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости.

В общем случае **адекватность модели** проверяется с помощью **статистических критериев**, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов исследования поведению изучаемого объекта в соответствующих условиях.

При математическом моделировании часто возникают различного рода *погрешности*, обусловленные следующими причинами:

– погрешности **физической абстракции** (неточность физических законов и закономерностей, непринятие во внимание дополнительных физических факторов и т.д.);

– погрешности **математического описания**:

а) **погрешность (неточность) модели** (приближенное выполнение тех или иных соотношений и связей),

б) **погрешность (неточность) входных данных**,

в) **погрешность расчетов** (погрешность вычислительных приборов и установок, приближенные методы вычислений);

г) **погрешность обработки результатов** (округление результатов, графическое изображение).

4. Некоторые общеизвестные классы математических моделей.

4.1. Кинетические модели.

4.1.1. Уравнение Больцмана.

Кинетическое уравнение Больцмана – уравнение, описывающее статистическое распределение частиц в газе или жидкости. Является одним из самых важных уравнений физической кинетики (области статистической физики, которая описывает системы, далёкие от термодинамического равновесия, например, в присутствии градиентов температур и электрического поля). Уравнение Больцмана используется для изучения переноса тепла и электрического заряда в жидкостях и газах, и из него выводятся транспортные свойства, такие как электропроводность, эффект Холла, вязкость и теплопроводность. Уравнение применимо для разреженных систем, где время взаимодействия между частицами мало (гипотеза молекулярного хаоса).

4.1.2. Уравнение Фокера-Планка.

4.2. Модели механики сплошных сред.

4.2.1. Уравнения классической механики

4.2.2. Уравнения квантовой механики

4.2.3. Уравнения для полей

4.2.4. Уравнения гидродинамики

4.2.5. Уравнения газовой динамики

4.3. Модели частиц.

4.4. Стохастические модели.

4.5. Имитационные модели.

Имитационные модели – математические модели, которые достаточно точно воспроизводят логическую схему и временную динамику поведения изучаемого объекта. Как правило они представляют собой либо алгоритм функционирования объекта (пассивная форма), либо исполняющийся в реальном времени программный код (активная форма).